

В. И. СОБОЛЕВ

**О ПОЛУУПОРЯДОЧЕННОЙ МЕРЕ МНОЖЕСТВ, ИЗМЕРИМЫХ
ФУНКЦИЯХ И НЕКОТОРЫХ АБСТРАКТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 V 1953)

Ниже строится мера линейных точечных множеств, значения которой принадлежат полуупорядоченному кольцу, рассматриваются измеримые в смысле этой меры функции и вводится некоторый интеграл типа Лебега — Стильтьеса. Полученные результаты обобщают теорию операторной меры и операторных интегралов, разработанную А. И. Плеснером ⁽¹⁾.

Пусть X — полуупорядоченное кольцо ⁽²⁾ и $\{e_\lambda\}$, $-\infty < \lambda < \infty$, — некоторое разложение единицы e этого кольца, т. е. некоторое множество дизъюнктивных частей единицы (д. ч. е.) кольца X , зависящих от вещественного параметра λ , причем

- 1) $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} e_\lambda = e_{-\infty} = 0$; $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e_\lambda = e_{+\infty} = e$;
- 2) $e_\lambda \leq e_\mu$ при $\lambda < \mu$;
- 3) $e_\lambda e_\mu = e_\lambda$ при $\lambda \leq \mu$;
- 4) $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \lambda_0 \\ \lambda < \lambda_0}} e_\lambda = e_{\lambda_0-0} = e_{\lambda_0}$.

Отправляясь от этого разложения единицы, построим аддитивную функцию $e(\Delta)$ интервалов Δ , называя при этом интервалом замкнутые, открытые и полуоткрытые интервалы и отдельные точки и полагая, по определению:

- 1) $e(\Delta) = e(x) = e_{x+0} - e_x$, если $\Delta = x$ — отдельной точке;
- 2) $e(\Delta) = e(\lambda, \mu) = e_\mu - e_{\lambda+0}$, если $\Delta = (\lambda, \mu)$;
- 3) $e(\Delta) = e(\Delta_1) + e(\Delta_2)$, если $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ и $\Delta_1 \cdot \Delta_2 = 0$.

С помощью этих трех правил мы можем построить $e(\Delta)$ для любого интервала Δ , например $e(\Delta) = e(\lambda, \mu) = e_\mu - e_\lambda$ для $\Delta = [\lambda, \mu)$, и легко проверить, что свойство 3) сохраняется для интервалов всех видов. Отметим также, что $e(\Delta_1 \cdot \Delta_2) = e(\Delta_1) \cdot e(\Delta_2)$.

Лемма. Если Δ есть предел возрастающей (убывающей) последовательности интервалов, $\Delta = \lim_n \Delta_n$, то $e(\Delta) = \lim_n e(\Delta_n)$.

Таким образом, $e(\Delta)$ есть нормальная, вполне (счетно) аддитивная функция интервалов.

Функция $e(\Delta)$ обычным образом может быть продолжена в меру. Именно, для открытого множества $G = \sum_n \Delta_n$ полагаем $e(G) = \sum_n e(\Delta_n)$,

причем в случае бесконечного ряда сходимость его следует из ограниченности любой частичной суммы элементом $e = e(-\infty, \infty)$. Для замкнутого множества F полагаем $e(F) = e - e(CF)$.

Пусть теперь M — произвольное множество, расположенное на вещественной прямой. Назовем, как обычно, элемент $e^*(M) = \inf_{G \supset M} e(G)$ внешней мерой, а элемент $e_*(M) = \sup_{F \subset M} e(F)$ — внутренней мерой множества M . Если $e_*(M) = e^*(M) = e(M)$, то множество M назовем измеримым, а элемент $e(M)$, также являющийся д. ч. е., полуупорядоченной мерой множества M^* .

Построенная мера обладает большинством основных свойств числовой меры Лебега. Так например, открытые и замкнутые множества измеримы и оба определения меры для них совпадают; если измеримо M , то измеримо и CM , причем $e(M) = e - e(CM)$; сумма и пересечение конечного или счетного числа измеримых множеств есть измеримое множество и $e(\sum_n M_n) \leq \sum_n e(M_n)$, причем имеет место знак равенства, если $M_i \cdot M_j = 0$ при $i \neq j$. Отсюда следует, в частности, что класс измеримых множеств содержит все борелевские множества.

Отметим также, что

$$e(M_1 \cdot M_2) = e(M_1) \cdot e(M_2). \quad (1)$$

Рассмотрим вещественную функцию $f(\lambda)$ вещественной переменной λ , определенную на всей числовой прямой. Назовем функцию $f(\lambda)$ измеримой, если множества $E\{\lambda, f(\lambda) < a\}$ измеримы для любого a . Без труда проверяется, что непрерывная функция измерима и что алгебраические операции и операция предельного перехода не выводят за пределы класса измеримых функций. Таким образом, класс измеримых функций включает все беровские функции.

Пусть $f(\lambda)$ — ограниченная измеримая функция и $A \leq f(\lambda) < B$. Разобьем полуинтервал $[A, B)$ на части точками $A = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_{n-1} < \eta_n = B$, и пусть $M_i = \{\lambda, \eta_{i-1} \leq f(\lambda) < \eta_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Составим суммы

$$\underline{s}_n = \sum_{i=1}^n \eta_{i-1} e(M_i), \quad \bar{s}_n = \sum_{i=1}^n \eta_i e(M_i).$$

Как и в случае обычных числовых интегралов Лебега, убеждаемся, что существует элемент

$$s = \sup \underline{s}_n = \inf \bar{s}_n,$$

и этот элемент не зависит от выбора чисел A и B . Назовем этот элемент интегралом Лебега — Стильеса от функции и обозначим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) de_\lambda.$$

Если $f(\lambda)$ — неограниченная неотрицательная измеримая функция, пусть

$$[f(\lambda)]_N = \begin{cases} f(\lambda), & \text{если } |f(\lambda)| \leq N; \\ N, & \text{если } |f(\lambda)| > N. \end{cases}$$

Полагаем, по определению:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) de_\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda)]_N de_\lambda.$$

* В дальнейшем слово «полуупорядоченный» мы будем опускать.

если этот предел существует. Если $f(\lambda)$ — функция произвольного знака, принимаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) de_{\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} f_+(\lambda) de_{\lambda} - \int_{-\infty}^{\infty} f_-(\lambda) de_{\lambda},$$

если оба интеграла от неотрицательных функций $f_+(\lambda)$ и $f_-(\lambda)$ существуют.

Для введенного таким образом интеграла можно доказать основные свойства обычного интеграла Лебега, как то дистрибутивность, полную аддитивность, абсолютную непрерывность и обычные теоремы о предельном переходе под знаком интеграла. Можно также доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) de_{\lambda} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\lambda) de_{\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) de_{\lambda},$$

если входящие в это равенство интегралы существуют.

Наконец, если E — произвольное измеримое множество, то, аналогично предыдущему, заменяя $(-\infty, \infty)$ на E , можно определить

$$\int_E f(\lambda) de_{\lambda}.$$

Легко видеть, что, в силу (1),

$$e(E) \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) de_{\lambda} = \int_E f(\lambda) de_{\lambda}.$$

Теория полуупорядоченной меры и интеграла может быть использована при изучении полуупорядоченных колец. Так например, пусть a — произвольный элемент кольца X и $\{e_{\lambda}^a\}$ — разложение единицы, порожденное этим элементом. Тогда элемент

$$b = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) de_{\lambda}^a,$$

где $f(\lambda)$ — суммируемая относительно меры $e^a(M)$ функция (кратко — a -суммируемая функция), естественно назвать функцией элемента a и обозначить $f(a)$.

Теорема. Для того чтобы элемент b был функцией элемента a , необходимо и достаточно, чтобы для любого интервала Δ нашлось a -измеримое множество M_{Δ} такое, что $e^b(\Delta) = e^a(M_{\Delta})$.

Необходимость будет, очевидно, доказана, если показать, что для любого μ найдется a -измеримое E_{μ} такое, что $e_{\mu}^b = e^a(E_{\mu})$. Последнее утверждение следует из равенств

$$\begin{aligned} e_{\mu}^b &= \sup_n \{ \inf [n(\mu e - b)_{++}, e] \} = \sup_n \left\{ \inf \left[\int_{E_{\mu}} n(\mu - f(\lambda)) de_{\lambda}^a, e \right] \right\} = \\ &= \sup_n \int_{E_{\mu}} \inf \{ n(\mu - f(\lambda)), 1 \} de_{\lambda}^a = \int_{E_{\mu}} de_{\lambda}^a = e^a(E_{\mu}), \end{aligned}$$

где $E_{\mu} = E \{ \lambda, f(\lambda) < \mu \}$.

Для доказательства достаточности положим для любого λ

$$f(\lambda) = \inf_{E_{\mu} \supset \lambda} \mu.$$

Опираясь на свойства семейства $\{E_\mu\}$, можно показать, что для построенной функции $E\{\lambda, f(\lambda) < \sigma\} = E_\sigma$. Теперь, полагая $b_N = be[-N, N)$, будем иметь

$$b_N = \lim_n \sum_{i=1}^n \mu_{i-1} e^b(\Delta_i),$$

где $\Delta_i = [\mu_{i-1}, \mu_i)$, $-N = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_{n-1} < \mu_n = N$. Но $e^b(\Delta_i) = e^a(M_i)$, где $M_i = E\{\lambda, \mu_{i-1} \leq f(\lambda) < \mu_i\}$. Поэтому

$$b_N = \lim_n \sum_{i=1}^n \mu_{i-1} e^a(M_i) = \int_{E_N - E_{-N}} f(\lambda) de_\lambda^a.$$

Так как, очевидно, $e(E_N - E_{-N}) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то

$$b = \lim_{N \rightarrow \infty} b_N = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) de_\lambda^a.$$

Можно указать и нелокальные признаки того, что элемент b является функцией элемента a .

Замечание. Теория меры и интегрирования обобщается очевидным образом на случай, когда X есть линейное полуупорядоченное пространство.

Воронежский государственный
университет

Поступило
12 III 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. И. Плеснер, В. А. Рохлин, Усп. матем. наук, 1, вып. 11, 71 (1946).
² В. И. Соболев, ДАН, 56, № 3, 237 (1947).