Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 1

МАТЕМАТИКА

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ и А. И. ПОВОЛОЦКИЙ

К ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДАМ В ЗАДАЧЕ О ТОЧКАХ БИФУРКАЦИИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 IV 1953)

Пусть A — нелинейный оператор, действующий в банаховом пространстве E и преобразующий нуль θ этого пространства в нуль. Тогда уравнение

$$A\varphi = \lambda\varphi \tag{1}$$

имеет тривиальное нулевое решение θ при всех значениях параметра λ. Те числа λ, при которых уравнение (1) имеет отличные от θ решения φ, называют собственными числами оператора A, а соответствующие решения φ — собственными векторами (собственными функциями). Число λ_0 называется точкой бифуркации оператора A, если любым числам ε, $\delta > 0$ отвечают такие собственное число λ и собственная функция φ, $A\varphi = \lambda\varphi$, что $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, $\|\varphi\| < \delta$.

Пусть оператор A вполне непрерывен и дифференцируем в точке θ, т. е. представим в виде $A\varphi = B\varphi + \omega(\varphi)$, где B — линейный оператор и $\lim\limits_{\|\varphi\|\to 0} \frac{\|\omega(\varphi)\|}{\|\varphi\|} = 0$. Оператор B также будет вполне непрерывен [1]. Точками бифуркации оператора могут быть только собственные числа линейного оператора B (это утверждение для некоторых случаев было указано еще Ф. С. Ясинским [2]). Однако нельзя утверждать, что все собственные числа оператора B — точки бифуркации оператора A (как показывают противоречащие примеры). В [3] один из авторов настоящей заметки показал, что все собственные числа нечетной кратности оператора B будут точками бифуркации. Вариационно-топологические соображения позволили показать, что для потенциальных операторов A (операторов-градиентов некоторых функционалов), действующих в гильбертовом пространстве, справедливы более сильные теоремы.

В настоящей заметке мы получаем аналогичные результаты для операторов A вида $J\Gamma$, где Γ ($\Gamma\theta = \theta$) — оператор градиента слабо непрерывного функционала, определенного в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, имеющий в точке θ производную Фреше B, являющуюся линейным самосопряженным положительно определенным оператором. Оператор J — некоторый унитарный оператор, совпадающий с единичным I на одном инвариантном подпространстве оператора B, и равный $-I$ на ортогональном дополнении.

В качестве примера укажем, что к исследованию операторов вида $J\Gamma$ приводит изучение операторов Гаммерштейна Df, где

$$D\varphi(x) = \int\limits_G K(x, y)\varphi(y)\,dy, \quad f\varphi(x) = f[x, \varphi(x)],$$

если выполнены следующие условия: оператор f действует из L^p в L^q

$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ и дифференцируем в нуле пространства L^p ([4]), причем производная Фреше равна I; оператор D имеет конечное число положительных собственных чисел; оператор D расщепляем в смысле ([5]). Тогда вопрос о разрешимости уравнения $Df\varphi=\lambda\varphi$ эквивалентен вопросу о разрешимости уравнения $J(D^{1/2})^* fD^{1/2}\varphi=\lambda\varphi$ с оператором приведенного вида.

Во второй части заметки мы указываем некоторые новые общие признаки существования собственных функций (они представляют интерес, конечно, только для недифференцируемых операторов, так как для «гладких» операторов справедливы более сильные утверждения) и указываем на одно новое применение идей Л. А. Люстерника ([6]) к задачам о собственных функциях нелинейных интегральных уравнений.

Теорема 1. *Пусть оператор* Γ $(\Gamma\theta=\theta)$ — *нелинейный вполне непрерывный оператор, являющийся градиентом слабо непрерывного функционала* $\Phi(\varphi)$ $(\Phi(\theta)=0)$, *определенного в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$.

Пусть оператор Γ *имеет в нуле* θ *пространства* $\mathfrak{H}$ *производную Фреше* B, *являющуюся самосопряженным положительно определенным вполне непрерывным оператором. Пусть* J — *унитарный оператор, коммутирующий с* B *и такой, что оператор* JB *имеет конечное число положительных собственных чисел.*

Тогла наименьшее положительное собственное число оператора JB *будет точкой бифуркации нелинейного оператора* $J\Gamma$.

Говорят, что оператор Γ является градиентом функционала $\Phi(\varphi)$, дифференцируемого с ограниченным остатком на множестве $T\subset\mathfrak{H}$, если выражение $\frac{|\Phi(\varphi+h)-\Phi(\varphi)-(\Gamma\varphi,\ h)|}{\|h\|}$ стремится к нулю при $\|h\|\to 0$ равномерно относительно $\varphi\in T$.

Теорема 2. *Пусть* Γ $(\Gamma\theta=\theta)$ — *нелинейный вполне непрерывный оператор, являющийся градиентом слабо непрерывного функционала, дифференцируемого с ограниченным остатком в некоторой окрестности точки* θ. *Пусть оператор* Γ *имеет в нуле* θ *пространства* $\mathfrak{H}$ *производную Фреше* B, *являющуюся самосопряженным положительно-определенным вполне непрерывным оператором. Пусть* J — *унитарный оператор, коммутирующий с* B *и такой, что оператор* JB *имеет конечное число положительных собственных чисел. Тогда каждое положительное собственное число оператора* JB *будет точкой бифуркации нелинейного оператора* $J\Gamma$.

В качестве примера рассмотрим оператор Гаммерштейна

$$(Df)\varphi(x)=\int K(x,\ y)f[y,\ \varphi(y)]\,dy\quad(\operatorname{mes}G<\infty). \tag{2}$$

При этом ограничимся простейшим случаем.

Теорема 3. *Пусть функция* $f(y,\ u)$ *непрерывна и непрерывно дифференцируема по* u *при* $y\in G$, $|u|<\alpha$, *где* α — *некоторое положительное число. Пусть* $f'_u(y,\ 0)\equiv 1$. *Пусть симметричное ядро* $K(x,\ y)$ *ограничено и имеет конечное число положительных собственных чисел* $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$. *Тогда каждое из чисел* $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ *будет точкой бифуркации нелинейного оператора* (2).

Для случаев, когда изучаемый нелинейный оператор в точке не имеет производной Фреше, доказать теоремы о существовании точек бифуркации не удается. Однако для операторов вида $J\Gamma$ можно установить общие теоремы о существовании собственных функций.

Пусть гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ является ортогональной суммой двух подпространств $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$, первое из которых конечномерно. Элементы $\mathfrak{H}_1$ будем обозначать через x, элементы $\mathfrak{H}_2$ — через y. Каждый элемент $z \in \mathfrak{H}$ тогда единственным образом представим в виде $z=x+y$. Через E обозначим множество таких элементов $z=x+y$, для которых $\|x\| \geqslant \|y\|$.

Функционал $\Phi(\varphi)$, заданный в $\mathfrak{H}$, будем называть растущим, если

$$\lim_{\varphi \in E, \|\varphi\| \to \infty} \Phi(\varphi) = +\infty.$$

Через J будем обозначать оператор, определенный равенством $J(x+y) = x-y$.

Вариационные соображения с использованием одной леммы Л. А. Люстерника [7] приводят к следующим утверждениям.

Теорема 4. *Пусть вполне непрерывный оператор Γ $(\Gamma\theta=\theta)$ является градиентом слабо непрерывного растущего функционала. Тогда оператор $J\Gamma$ имеет не менее счетного числа собственных векторов, среди которых есть вектора со сколь угодно большой нормой.*

Теорема 5. *Если в условиях теоремы 4 существует такое $c \geqslant 0$, что $(\Gamma\varphi, \varphi) > 0$ при $(J\varphi, \varphi) > c$, то оператор $J\Gamma$ имеет континуум собственных векторов.*

Теорема 6. *Если в условиях теоремы 5 $c=0$, то среди собственных векторов оператора $J\Gamma$ есть вектора со сколь угодно малой нормой.*

Естественные приложения теорем 4—6 находят при установлении существования собственных функций у операторов (2). Приведем два примера.

Теорема 7. *Пусть симметричное ядро $K(x, y)$ имеет конечное число положительных собственных чисел и ограничено. Пусть функция $f(x, u)$ удовлетворяет условию*

$$f(x, u) \operatorname{sign} u > 0 \quad (x \in G, |u| < \alpha), \tag{3}$$

где α — некоторое положительное число. Тогда оператор (2) имеет континуум ограниченных собственных функций, среди которых есть функции со сколь угодно малым supremum'ом модуля.

Теорема 8. *Пусть симметричное ядро $K(x, y)$ имеет конечное число положительных собственных чисел и удовлетворяет условиям:*

$$\iint\limits_{GG} |K(x, y)|^2 \, dx\, dy < \infty, \qquad \iint\limits_{GG} |K(x, y)|^{p+\varepsilon} \, dx\, dy < \infty \quad (p \geqslant 2), \tag{4}$$

где ε — некоторое положительное число. Пусть оператор $f: f\varphi(x) = f[x, \varphi(x)]$ действует из L^p в L^q $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, а функция $f(x, u)$ удовлетворяет условию:

$$f(x, u) \operatorname{sign} u \geqslant \alpha |u| - b(x) |u|^{1-\gamma} - c(x), \tag{5}$$

где $\alpha > 0$, $0 < \gamma \leqslant 1$, $b(x) \in L^{2/\gamma}$, $c(x) \in L^2$. Тогда оператор (2) имеет в L^2 (и в L^p) континуум собственных функций, среди которых есть функции сколь угодно большой нормы. Если дополнительно выполнено условие (3), то оператор (2) имеет и собственные функции сколь угодно малой нормы.

Замечание 1. В условиях теоремы 8 не предполагается, что $\operatorname{mes} G < \infty$.

Замечание 2. Если в условиях теоремы 8 $p=2$, то условие (4) можно заменить требованием, чтобы ядро $K(x, y)$ порождало в L^2 вполне непрерывный линейный оператор.

Различные теоремы о существовании собственных функций у операторов (2) с неположительно-определенными ядрами устанавливались ранее различными авторами при помощи топологических методов и при помощи теории М. Г. Крейна конусов в банаховом пространстве. Вариационные методы к установлению существования собственных функций у операторов (2) с некоторыми классами неположительно-определенных ядер первым применил М. М. Вайнберг, который показал, что при некоторых ограничениях (см. ([8])) операторы (2) имеют счетное число собственных функций.

Дополнительные сведения о собственных функциях операторов вида $J\Gamma$ можно получить, используя вариационно-топологические идеи Л. А. Люстерника ([6]) и один результат статьи ([9]).

Теорема 9. *Пусть в условиях теоремы* 5 (*или* 6) *оператор* Γ *является градиентом слабо непрерывного функционала, дифференцируемого с ограниченным остатком на каждом ограниченном множестве. Пусть оператор* Γ *нечетен. Тогда на каждом «гиперболоиде»* $(J\varphi, \varphi) = a$, $a > c$, *оператор* $J\Gamma$ *имеет не менее чем* $2n$ *геометрически различных собственных векторов, где* n — *размерность подпространства* $\mathfrak{H}_1$.

Теорему 9 можно применить к изучению оператора (2) (сведя его исследование к рассмотрению оператора $J(D^{1/2})^* fD^{1/2}$), если предположить, что функция $f(x, u)$ нечетна по u: $f(x, -u) = -f(x, u)$.

Поступило
12 III 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ж. Лерей, Ю. Шаудер, Усп. матем. наук, **1**, в. 3—4 (13—14) (1946). [2] Ф. С. Ясинский, Избр. работы по устойчивости сжатых стержней, М. — Л., 1952, приложение IV. [3] М. А. Красносельский, ДАН, **74**, № 1 (1950); ДАН, **79**, № 3 (1951). [4] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, ДАН, **89**, № 4 (1953). [5] М. А. Красносельский, ДАН, **82**, № 3 (1952); ДАН, **88**, № 5 (1953). [6] Л. А. Люстерник, Усп. матем. наук, в. 11 (1946). [7] Л. А. Люстерник, Матем. сборн., **41** : 3 (1934). [8] М. М. Вайнберг, ДАН, **78**, № 6 (1951); ДАН, **85**, № 2 (1952). [9] М. А. Красносельский, Усп. матем. наук, **7**, в. 2 (1952).