Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 1

МАТЕМАТИКА

О. И. ИНОЗЕМЦЕВ

К ТЕОРИИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 23 IV 1953)

Пусть дана непрерывная функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 1$ $(-\infty < x_1, \ldots, x_n < \infty)$. Примем ее в качестве функции веса, определяя с ее помощью пространство C_φ всех тех непрерывных функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, для которых

$$\|f\| = \sup_{-\infty < x_1, \ldots, x_n < \infty} \frac{|f(x_1, \ldots, x_n)|}{\varphi(x_1, \ldots, x_n)} < \infty.$$

Особенное значение будут иметь такие функции веса, для которых функции от одной переменной $\alpha(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, определенная следующим образом:

$$\alpha(t) = \sup_{\substack{-\infty < x_1, \ldots, x_n < \infty \\ \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 \leqslant t^2}} \frac{\varphi(x_1 + \xi_1, \ldots, x_n + \xi_n)}{\varphi(x_1, \ldots, x_n)} \quad \text{при } t \geqslant 0;$$

$$\alpha(t) = \alpha(0) = 1 \quad \text{при } t \leqslant 0,$$

удовлетворяет неравенству

$$\int_0^\infty \frac{\ln \alpha(t)}{1 + t^2} dt < \infty.$$

В силу определения $\alpha(t)$ есть неубывающая функция, удовлетворяющая легко проверяемому неравенству

$$\alpha(t_1 + t_2) \leqslant \alpha_1(t_1)\, \alpha(t_2).$$

Из последнего неравенства вытекает существование конечного предела $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{\ln \alpha(t)}{t}$, который, очевидно, должен равняться нулю.

Назовем модули непрерывности функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in C_\varphi$ относительно веса $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ величину $(\rho \geqslant 0)$

$$\omega_\varphi(\rho; f) = \sup_{\substack{-\infty < x_1, \ldots, x_n < \infty \\ \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 \leqslant \rho^2}} \frac{|f(x_1 + \xi_1, \ldots, x_n + \xi_n) - f(x_1, \ldots, x_n)|}{\varphi(x_1, \ldots, x_n)\, \alpha(\rho)}.$$

Далее, назовем сферическим модулем непрерывности функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in C_\varphi$ относительно веса $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ величину

$$\Omega_\varphi(\delta; f) = \sup_{\substack{-\infty < x_1, \ldots, x_n < \infty \\ \rho \leqslant \delta}} \frac{\left| \frac{1}{S} \int\limits_S f(x_1 + \rho\xi_1, \ldots, x_n + \rho\xi_n)\, dS_\xi - f(x_1, \ldots, x_n) \right|}{\varphi(x_1, \ldots, x_n)\, \alpha(\rho)},$$

где S означает поверхность единичной сферы $\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2=1$, а dS_ξ — $(n-1)$-мерный элемент площади этой сферы.

Наиболее важным случаем является тот, когда

$$\Omega_\varphi(\delta; f) \leqslant M\delta^\gamma \quad (0<\gamma\leqslant 2),$$

где M — постоянная. Это есть аналог обобщенного условия Коши — Липшица в форме Зигмунда.

Мы будем рассматривать приближение функций из пространства C_φ посредством целых трансцендентных функций конечной степени. При этом под степенью такой функции $g(z_1,\ldots,z_n)$ мы будем понимать величину

$$\sigma=\overline{\lim}\frac{\ln|g(z_1,\ldots,z_n)|}{\sqrt{|z_1|^2+\ldots+|z_n|^2}}<\infty.$$

Число σ естественно назвать сферической степенью функции $g(z_1,\ldots,z_n)$ *.

Принятое нами выше ограничение $0<\gamma\leqslant 2$ для показателя имеет следующее основание: если

$$\Omega_\varphi(\delta; f)\leqslant M\delta^\gamma \quad (\gamma>2), \tag{1}$$

то $f(x_1,\ldots,x_n)$ представляет значение при $z_1=x_1,\ldots,z_n=x_n$ целой функции нулевой степени $f(z_1,\ldots,z_n)$.

В самом деле, из (1) на основании известных свойств обобщенного параметра Лапласа ([4]) следует, что $f(x_1,\ldots,x_n)$ есть гармоническая функция во всем пространстве. Представим ее с помощью интеграла Пуассона

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{S}\int\limits_S f(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,\frac{R^{n-2}(R^2-\rho^2)}{\eta^n}\,dS_\xi,$$

где S — поверхность шара $\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2=R^2$, $\rho=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$ и r — расстояние между точками $(x_1,\ldots,x_n)$ и $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$. Заменяя в правой части $x_1,\ldots,x_n$ на $z_1=x_1+iy_1,\ldots,z_n=x_n+iy_n$, строим целую функцию $f(z_1,\ldots,z_n)$, равную $f(x_1,\ldots,x_n)$ при $z_1=x_1,\ldots,z_n=x_n$. При этом

$$|f(z_1,\ldots,z_n)|\leqslant\frac{1}{S}\int\limits_S|f(\xi_1,\ldots,\xi_n)|\,\frac{R^{n-2}(R^2+|z_1|^2+\ldots+|z_n|^2)}{(R-\sqrt{|z_1|^2+\ldots+|z_n|^2})^n}\,dS_\xi.$$

Пусть $\alpha(\rho)<e^{1/2\,\varepsilon\rho}$ для $\rho>\rho_\varepsilon$. В этом случае при

$$|z_1|^2+\ldots+|z_n|^2>\rho_\varepsilon^2,$$

беря $R=2\sqrt{|z_1|^2+\ldots+|z_n|^2}$, найдем, что

$$|f(z_1,\ldots,z_n)|\leqslant\frac{5\cdot 2^{n-2}}{S}\int\limits_S\|f\|\,\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,dS_\xi\leqslant 5\cdot 2^{n-2}\|f\|\,\varphi(0,\ldots,0)\alpha(R)\leqslant$$

$$\leqslant 5\cdot 2^{n-2}\,\varphi(0,\ldots,0)\,\|f\|\,e^{\varepsilon\sqrt{|z_1|^2+\ldots+|z_n|^2}}.$$

Пусть G_σ $(\sigma\geqslant 0)$ означает совокупность всех целых функций $g(z_1,\ldots,z_n)$ сферической степени $\leqslant\sigma$ таких, что $g(x_1,\ldots,x_n)\in C_\varphi$, и пусть

$$E_\sigma\{f;\varphi\}=\min_{g\in G_\sigma}\|f-g\|.$$

* Обычно рассматриваются целые функции $g_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}(z_1,\ldots,z_n)$ многих переменных $z_1,\ldots,z_n$ конечной степени $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$, соответственно, по $z_1,\ldots,z_n$ (см. ([1-3])).

В таком случае справедливы следующие обобщения классических теорем С. Н. Бернштейна и Д. Джексона.

Теорема 1. *Если функция* $f(x_1, \ldots, x_n) \in C_\varphi$ *имеет все частные производные порядка* p, *также принадлежащие* C_φ, *и если для производной* p-*го порядка по любому направлению* l *имеет место соотношение*

$$\Omega_\varphi(\delta; f_l^{(p)}) \leqslant M\delta^\gamma \quad (0 < \gamma \leqslant 2),$$

где M *и* γ *одинаковы для всех направлений* l, *то при любом* $\sigma > 0$

$$E_\sigma\{f; \varphi\} \leqslant A_\sigma \frac{M}{\sigma^{p+\gamma}}.$$

Теорема 2. *Если* $f(x_1, \ldots, x_n)$ — *непрерывная функция и при любом* $\sigma \geqslant \sigma_0 > 0$

$$E_\sigma\{f; \varphi\} \leqslant \frac{A}{\sigma^{p+\gamma}},$$

где $A > 0$, *целое число* $p \geqslant 0$ *и* $\gamma\,(0 < \gamma < 1)$ *от* σ *не зависят, то*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g_{\sigma_0}(x_1, \ldots, x_n) + h(x_1, \ldots, x_n),$$

где $g_{\sigma_0}(z_1, \ldots, z_n)$ — *целая функция сферической степени* $\leqslant \sigma_0$, *а* $h(x_1, \ldots, x_n) \in C_\varphi$ *и имеет по каждому направлению* l *производную порядка* p, *причем*

$$\omega_\varphi(\delta; h_l^{(p)}) \leqslant M\delta^\gamma,$$

где M *от* l *не зависит.*

Если же $\gamma = 1$, *то модуль непрерывности функции* $h_l^{(p)}$ *относительно веса* φ *удовлетворяет неравенству*

$$\omega_\varphi(\delta; h_l^{(p)}) \leqslant M\delta \ln \frac{1}{\delta} \quad (0 < \delta < 1).$$

Доказательство этих теорем основано на одном важном предложении В. А. Марченко ([5]), которое позволяет строить целые функции конечной степени, достаточно быстро убывающие при $\pm x \to \infty$. В нашем случае теорема В. А. Марченко дает возможность построить целую функцию $K(z)$ степени $\leqslant 1$, для которой

$$K(-z) = K(z), \quad \int_0^\infty K(x)\, x^{n-1}\, dx = 1, \quad \int_0^\infty K(x)\, x^{n+k-1}\, dx = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, p),$$

$$|K(\sigma x)| \leqslant \frac{M(\sigma)}{\alpha^2(x)} \left(\frac{\sin \varepsilon\sigma x}{\varepsilon\sigma x}\right)^{2q} \quad (0 \leqslant x < \infty)$$

при любом положительном σ. При этом $M(\sigma)$ есть невозрастающая функция при $\sigma \geqslant 1$, ε — положительное число, а q — натуральное число, большее $\frac{n+p+1}{2}$, которыми можно распоряжаться по желанию.

При помощи ядра $K(x)$ строится целая функция

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sigma^n}{S} \int_0^\infty \int_S f(x_1 + \rho\xi_1, \ldots, x_n + \rho\xi_n)\, K(\sigma\rho)\, \rho^{n-1}\, d\rho\, dS_\xi$$

степени $\leqslant \sigma$, позволяющая доказать теорему 1.

Для доказательства теоремы 2 нужно следующее обобщение известного предложения С. Н. Бернштейна.

Пусть $g(z_1, \ldots, z_n)$ — целая функция сферической степени $\leqslant \sigma$ и пусть

$$|g(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant L\varphi(x_1, \ldots, x_n) \quad (-\infty < x_1, \ldots, x_n < \infty),$$

где L — константа. В таком случае производная от $g(x_1, \ldots, x_n)$ по любому направлению l удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{\partial g}{\partial l}\right| \leqslant L(\sigma + \varepsilon) N_\varepsilon \varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

где N_ε — величина, зависящая только от ε и ограниченная при всяком $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0 > 0$.

Приведем достаточно общий пример функции веса $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющей всем нашим требованиям.

Возьмем целую функцию нулевого рода

$$F(z) = C\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\alpha_k + i\beta_k}\right),$$

для которой

$$|F(x)| \geqslant 1 \quad (-\infty < x < \infty);$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\ln|\beta_k||}{|\beta_k|} < \infty.$$

Тогда функция

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \{|F(x_1)|^\mu + \ldots + |F(x_n)|^\mu\}^\lambda$$

при любых $\mu > 0$, $\lambda > 0$ удовлетворяет всем нашим требованиям, причем

$$\alpha(t) \leqslant \left\{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{t}{|\beta_k|}\right)\right\}^{\lambda\mu} \quad (t \geqslant 0);$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln \alpha(t)}{1 + t^2}\, dt \leqslant \lambda\mu \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\pi}{4}\ln\left(1 + \frac{1}{\beta_k^2}\right) + \frac{1}{|\beta_k|} + \frac{\ln|\beta_k|}{|\beta_k|}\right\} < \infty.$$

Харьковский
политехнический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
21 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, ДАН, **59**, № 8 (1948). [2] M. Plancherel, G. Pólya, Comm. Math. Helvetici, **9**, 224 (1937); **10**, 110 (1938). [3] С. М. Никольский, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **38** (1951). [4] И. И. Привалов, Субгармонические функции, М.— Л., 1937, стр. 18—20. [5] В. А. Марченко, Зап. матем. отд. матем. факультета ХГУ и Харьковск. матем. об-ва, сер. 4, **22**, 115 (1950).