Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 6

ФИЗИКА

Б. Т. ГЕЙЛИКМАН

О ТЕОРИИ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ МЕЗОННЫХ ПОЛЕЙ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 24 I 1953)

В ([1]) было исследовано мезонное поле с нулевым спином, взаимодействующее с бесконечно тяжелой частицей. Рассмотрим гамильтониан в случае псевдоскалярного поля и покоящейся частицы с конечной массой. При этом удобнее в выражении для энергии взаимодействия частицы с полем не переходить к нерелятивистскому приближению:

$$H = {}^1/_2 \int \sum_{\alpha}^{3} [\Pi_\alpha^2 + c^2 (\nabla\Phi_\alpha)^2 + c^2\varkappa^2\Phi_\alpha^2 - 2\sqrt{4\pi}\, c\, (G_\alpha\Phi_\alpha + F_\alpha\Pi_\alpha)]\, d\mathbf{r} + \beta mc^2; \quad (1)$$

$$G_\alpha = -i\beta\gamma_5\tau_\alpha g_{ps} U(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) + (g_{pv}/\varkappa)\,\tau_\alpha(\vec{\sigma}, \nabla U);\; F_\alpha = (g_{pv}/\varkappa c)\gamma_5\,\tau_\alpha U(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1).$$

Чтобы выделить, как в ([1]), классическую часть Φ_α, рассмотрим поле φ_α^0, подчиняющееся уравнениям:

$$\Delta\varphi_\alpha^0 - \varkappa^2\varphi_\alpha^0 = -(\sqrt{4\pi}/c)\,\langle G_\alpha\rangle_{\text{ср}}; \quad (2)$$

$$H^0\psi^0 = E^0\psi^0; \quad (3)$$

$$\langle G_\alpha\rangle_{\text{ср}} = \frac{(\psi^{0*}, G_\alpha\psi^0)}{(\psi^{0*}, \psi^0)};\; H^0 = \frac{c^2}{2}\int\sum_\alpha\Big[(\nabla\varphi_\alpha^0)^2 + \varkappa^2(\varphi_\alpha^0)^2 - 2\frac{\sqrt{4\pi}}{c}G_\alpha\varphi_\alpha^0\Big]\,d\mathbf{r} + \beta mc^2.$$

Подставим решение (2)

$$\varphi_\alpha^0 = \frac{1}{c\sqrt{4\pi}}\int\langle G_\alpha(\mathbf{r}')\rangle_{\text{ср}}\, e^{-\varkappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}\,d\mathbf{r}'$$

в (3).

При этом получается система из 8 нелинейных уравнений для 8 компонент ψ^0 (см. ([1])). Собственные значения E_λ^0 имеют вид:

$$E_\lambda^0 = -{}^1/_2\int\sum_\alpha |G_\alpha(\mathbf{r})|_{\lambda\lambda}\cdot|G_\alpha(\mathbf{r}')|_{\lambda\lambda}\, e^{-\varkappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{r}' + \beta_{\lambda\lambda}mc^2. \quad (4)$$

Для каждого состояния λ находим полную ортогональную систему функций $\psi_{\lambda\mu}^0(s)$, являющихся решениями уравнения $H_\lambda^0\psi_{\lambda\mu}^0 = E_{\lambda\mu}^0\psi_{\lambda\mu}^0$.

Предположим, что $\Phi = \varphi_\lambda^0 + \varphi_\lambda$; $\varphi_\lambda \ll \varphi_\lambda^0$. Тогда $H = H_\lambda^0 + H_{\text{н}\lambda} + H'$,

$$H' = -c\sqrt{4\pi}\int\sum_\alpha F_\alpha\Pi_\alpha\,d\mathbf{r} + c\sqrt{4\pi}\int\sum_\alpha(|G_\alpha|_{\lambda\lambda} - G_\alpha)\,\varphi_\alpha\,d\mathbf{r} +$$
$$+ {}^1/_2\int\sum_\alpha(\Pi_\alpha^2 + c^2(\nabla\varphi_\alpha)^2 + c^2\varkappa^2\varphi_\alpha^2)\,d\mathbf{r} - H_{\text{н}\lambda}; \quad (5)$$

$H_{\text{н}\lambda}$ — нулевая энергия гамильтониана (6).

Будем искать ψ-функцию системы в виде $\psi_\lambda = \sum\limits_\mu \chi_{\lambda\mu}(q_k)\,\psi^0_{\lambda\mu}(s)$.

Пользуясь теорией возмущений, изложенной в [1], получаем с точностью до членов 2-го порядка уравнение для χ^0_λ:

$$\Big\{H'_{\lambda\lambda} + \sum_{\mu\neq\lambda} H'_{\lambda\mu} H'_{\mu\lambda} (E^0_\lambda - E^0_{\lambda\mu})^{-1}\Big\}\chi^0_\lambda = E_{\lambda 2}\chi^0_\lambda. \tag{6}$$

Если в (5) ввести новые переменные

$$\Pi'_\alpha = \Pi_\alpha - c\sqrt{4\pi}\,|F_\alpha|_{\lambda\lambda}; \qquad \varphi'_\alpha = \varphi_\alpha, \tag{7}$$

в $H'_{\lambda\lambda}$ (6) исчезнут члены, линейные относительно Π_α. В (6) появляется слагаемое нулевого порядка относительно φ_α: $-2\pi c^2 \sum \int (|F_\alpha|_{\lambda\lambda})^2\, d\mathbf{r}$, которое войдет в $E_{\text{н}\lambda}$. Если ввести с помощью канонического преобразования переменные Π''_α и φ''_α, линейно связанные с Π'_α и φ'_α, можно добиться также обращения в нуль смешанных членов типа $\Pi_\alpha\varphi_\beta$ и $\varphi_\alpha\Pi_\beta$. После этого, как в [1], раскладываем Π''_α, φ''_α по собственным функциям уравнений поля, соответствующих гамильтониану (6) в переменных Π''_α и φ''_α, и получаем сумму гамильтонианов осцилляторов. Уравнения поля имеют вид, подобный (8) в [1], и описывают движение мезона, взаимодействующего с тяжелой частицей.

Рассмотрим теперь систему n покоящихся частиц. При этом в (1) следует только заменить G_α и F_α суммами $\sum\limits_i G_{\alpha i}$ и $\sum\limits_i F_{\alpha i}$ $(F_{\alpha i} = (g_{pv}/\varkappa c)\ \gamma_{5i}\,\tau_{\alpha i}\,U(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$ и т. д.) и βmc^2 суммой $\sum\limits_i \beta_i mc^2$ (ввиду этого $K_{\alpha\beta}$ в (8) в [1] приобретает вид: $K_{\alpha\beta} = 4\pi g^2 \sum\limits_{\mu\neq\lambda}\sum\limits_{i,j}^{n} \dfrac{|O_{\alpha i}(\mathbf{r})|_{\lambda\mu}\,|O_{\beta j}(\mathbf{r}')|_{\mu\lambda}}{E^0_\lambda - E^0_{\lambda\mu}}$).

Энергия нулевого приближения E^0_λ будет иметь вид

$$E^0_\lambda = -{}^1\!/_2 \int \sum_{\alpha,i,j}^{3,n,n} |G_{\alpha i}(\mathbf{r})|_{\lambda\lambda}\,|G_{\alpha j}(\mathbf{r}')|_{\lambda\lambda}\, e^{-\varkappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}' + \sum_i^n |\beta_i|_{\lambda\lambda} mc^2. \tag{8}$$

Слагаемое нулевой энергии $E_{0\lambda} = -2\pi c^2 \sum \int |F_{\alpha i}|_{\lambda\lambda}\,|F_{\alpha j}|_{\lambda\lambda}\, d\mathbf{r}$, появляющееся после преобразования (7), также будет зависеть от $\mathbf{r}_i$. $E^0_\lambda + E_{0\lambda}$ представляет энергию взаимодействия тяжелых частиц; $E_{0\lambda}$ дает силы с «радиусом действия» $\sim a$. Для бесконечно тяжелых частиц энергия взаимодействия просто равна E^0_λ. Согласно (4) в [1]:

$$E^0_\lambda = -\frac{g^2}{2}\int \sum_{\alpha,i,j} |O_{\alpha i}(\mathbf{r})|_{\lambda\lambda}\,|O_{\alpha j}(\mathbf{r}')|\,\frac{e^{-\varkappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}'.$$

Если все $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \gg a$,

$$(E^0_\lambda)_{\text{пс}} = -\frac{g^2}{2\varkappa^2}\sum_{i\neq j,\alpha} \big(\{\tau_{\alpha i}\vec{\sigma}_i\}_{\lambda\lambda}\nabla_i\big)\big(\{\tau_{\alpha j}\vec{\sigma}_j\}_{\lambda\lambda},\ \nabla_j\big)\, e^{-\varkappa|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}\cdot|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|^{-1} + \text{const},$$

$$(E^0_\lambda)_{\text{ск}} = -\frac{g^2}{2}\sum_{i\neq j,\alpha} |\tau_{\alpha i}|_{\lambda\lambda}\,|\tau_{\alpha j}|_{\lambda\lambda}\, e^{-\varkappa|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}\cdot|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|^{-1} + \text{const}. \tag{9}$$

Существенно, что взаимодействие в (8) и (9) не является, в сущности, парным, так как ψ^0_λ представляют решения системы (3) (или (3) в [1]) для n частиц. Ввиду этого определяющие взаимодействие величины $|G_{\alpha i}|_{\lambda\lambda}$ или $|O_{\alpha i}|_{\lambda\lambda}$ зависят от n и от всех $\mathbf{r}_i$ (в особенности при малых расстояниях $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| < \varkappa^{-1}$). Для двух частиц также при $r_{12} < \varkappa^{-1}$ должны наблюдаться заметные отступления от выражений (8), (9) с $\{\tau\vec{\sigma}\}_{\lambda\lambda}$ и $\tau_{\lambda\lambda}$, не зависящими от r_{12}; в частности, благодаря зависимости $\{\tau\vec{\sigma}\}_{\lambda\lambda}$ и $\tau_{\lambda\lambda}$ от r_{12} возможно, как и для $E_{0\lambda}$, резкое возрастание E_λ^0 при $r_{12} \ll \varkappa^{-1}$. О подобном поведении $E_\lambda^0 + E_{0\lambda}$ свидетельствуют, повидимому, известные опыты по n — p и p — p рассеянию при энергиях от 150 до 340 *Мэв*.

Для того чтобы перейти от покоящихся тяжелых частиц к движущимся, можно воспользоваться адиабатической теорией возмущений [2].

Наши результаты, полученные выше и в [1], значительно отличаются от результатов теории сильной связи, изложенной в [3-8] и др. Можно показать, однако, что в этих работах содержатся существенные ошибки. В [4] для отделения в случае заряженного скалярного поля свободных мезонов от связанных вводятся переменные $q_0, p_0, \vartheta, p_\vartheta, q_1, p_1, q_1^*, p_1^*$; при этом в гамильтониане H (19) отбрасываются слагаемые $\frac{N}{4q_0^2}(-2p_\vartheta\Sigma + (\Sigma)^2) - \frac{i\sqrt{\pi}}{2q_0}\int d\mathbf{r}\,(p_1 + p_1^*)\,U - \frac{i\sqrt{\pi}\,\Sigma}{q_0}\int d\mathbf{r}\,(p_1^* - p_1)\,U$; здесь $q_0 = Q_0 + gI/2$; $\Sigma = -i\int d\mathbf{r}\,(p_1 q_1 - p_1^* q_1^*)$.

Так как $Q_0, p_1, p_1^*, q_1, q_1^*$ нулевого порядка относительно g (см. (26), (30)), то отброшенные слагаемые, очевидно, порядка g^{-1} и g^{-2}, а смешанные члены, содержащие и p_ϑ, и Σ, порядка g^{-2}, т. е. того же порядка, что и энергия изобар (см. (32)). Следовательно, «изобарные» переменные (p_ϑ, ϑ) не отделяются от переменных свободных мезонов (p_1, q_1) в том же порядке (g^{-2}), в котором получается энергия изобар.

Еще более существенна другая ошибка. Авторы утверждают, что уровень, соответствующий энергии взаимодействия, равной $-gq_0$, значительно ниже уровня, соответствующего $+gq_0$ (см. (21)), и в дальнейшем рассматривают лишь первый уровень. Однако, если во втором случае ввести переменную $Q_0 = q_0 + gI/2$ (тогда $q_0 < 0$; это равносильно замене $\vartheta \to \vartheta + \pi$ при $q_0 > 0$), то слагаемые в H порядка g^2 и g^0 будут, как и в первом случае, равны $-g^2I/4 + Q_0^2/2I$; лишь слагаемые $\sim g^{-1}$, содержащие $1/q_0$, окажутся с другим знаком. Учет этого вырождения, очевидно, должен заметно изменить результаты для членов порядка g^{-2}, т. е. для изобар.

И в случае нейтрального псевдоскалярного поля в [4] ошибочно рассматривается энергия взаимодействия $\mp gq_0/\varkappa$ только со знаком минус (см. (67)). Аналогичная ошибка сделана в [6] (скалярное заряженное поле). Вопреки утверждению автора, для обоих знаков корня в (20) энергия H одинакова с точностью до g^0: $H_1 = -G^2/\mu^2 + p^2/4 + \mu^2(q')^2$; $F'' = \mp F'$. То же относится и к (30). Поэтому результаты, полученные в [6], нуждаются в исправлении.

Далее, в [4] в случае нейтрального псевдоскалярного поля легко показать, что после унитарного преобразования $S = e^{iU}$, $U = \sqrt{4\pi}(\vec{\Pi}_0, \int d\mathbf{r}\,\Phi_1(\mathbf{r})\,\nabla\xi(\mathbf{r})/R)$; $R = \int d\mathbf{r}\,(\partial\xi/\partial x_i)^2$, в гамильтониане появляется (из-за сдвига $\vec{\Phi}_0$) отброшенный авторами смешанный член: $\frac{\sqrt{4\pi}}{RI}(\vec{\Phi}_0, \int\nabla\xi\Phi_1\,d\mathbf{r})$; $\vec{\Phi}_0 = \mathbf{n}_3(gI/\varkappa + Q_0)$. Q_0 и Φ_1 порядка g^0 (см. (61), (68)); поэтому смешанное слагаемое, содержащее Φ_1 и $\mathbf{n}_3$ (т. е. α и β), порядка g^1. Энергия же изобар оказывается только порядка g^{-2} (см. (68)).

В работе ([3]), посвященной более сложному случаю заряженного псевдоскалярного поля, получен гамильтониан:

$$H = \frac{\varkappa^2}{2g^2} \frac{4\pi}{\int (\partial X / \partial x)^2 dV} L_0^2 - \frac{3g^2}{4\varkappa^2} I + H_1;$$

$$L_0^2 = \sum (L_0^{\alpha\beta})^2; \quad H_1 = {}^1/_2\, N \sum_{\alpha,\beta} \langle p^0_{\alpha\beta} \rangle^2_H + \frac{1}{2I} \sum_{\alpha,\beta} (q^{(1)}_{\alpha\beta})^2 +$$

$$+ \sqrt{4\pi} \sum_{\alpha,\beta,k} \langle p^0_{\alpha\beta} \rangle_H e_{\beta k} \int \frac{\partial K}{\partial x_k} \Pi''_\alpha (x)\, dV + {}^1/_2 \sum_\alpha \int (\Pi''_\alpha)^2 dV +$$

$$+ {}^1/_2 \sum_\alpha \int \varphi'_\alpha (\varkappa^2 - \Delta)\, \varphi'_\alpha dV$$

(формулы (76), (77)).

Переменные $e_{\alpha k}$, $L_0^{\alpha\beta}$, $q^0_{\alpha\beta}$, $p^0_{\alpha\beta}$ удовлетворяют соотношениям: $i\,[L_0^{\alpha\beta}, e_{\gamma k}] = \delta_{\alpha\gamma} e_{\beta k} - \delta_{\beta\gamma} e_{\alpha k}$; $i\,[p^0_{\alpha\beta}, q^0_{\gamma\delta}] = {}^1/_2\, (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})$.

Очевидно, что благодаря наличию в H смешанного слагаемого нулевого порядка относительно g ($p^0_{\alpha\beta}$, $e_{\beta k}$ и Π''_α порядка g^0 (см. (84))), содержащего $e_{\beta k}$ и Π''_α, переменные $e_{\beta k}$, $L_0^{\alpha\beta}$ не отделяются от переменных Π''_α, φ'_α уже в нулевом порядке относительно g, и L_0^2 не коммутирует с H. Несмотря на это, авторы считают, что L_0^2 является интегралом движения, и получают энергию изобар (член с L_0^2) порядка g^{-2}. Далее, не проводится тщательного анализа отбрасываемых членов, которые появились в H в связи с преобразованием (78).

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Поступило 10 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Гейликман, ДАН, 90, № 3 (1953). [2] В. Паули, Общие принципы волновой механики, 1947, стр. 141. [3] W. Pauli, S. Dancoff, Phys. Rev., 62, 85 (1942). [4] R. Serber, S. Dancoff, ibid., 63, 143 (1943). [5] W. Pauli, S. Kusaka, ibid., 63, 400 (1943). [6] G. Wentzel, Helv. Phys. Acta, 13, 269 (1940); 14, 633 (1941). [7] G. Wentzel, ibid., 16, 551 (1943). [8] A. Houriet, ibid., 18, 473 (1945).