Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCI, № 1

МАТЕМАТИКА

А. Л. БРУДНО

НОРМЫ ПОЛЕЙ ТЕПЛИЦА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 27 IV 1953)

Множество R ограниченных последовательностей $x=\{x^1, x^2, \ldots\}$ с почленным сложением и умножением на константу является линейным пространством. Вводя в нем норму $|x| = \sup |x^k|$, мы обращаем его в полное нормированное (банаховское) пространство R_1. Если в R ввести норму $\|x\| = \overline{\lim} |x^k|$, то получится полное нормированное пространство R_2. Нормы операторов и функционалов в R_1 (R_2) будем обозначать $|\ |$ ($\|\ \|$).

Рассмотрим матрицу Теплица [1] $A=(a_k^n)$, где верхний индекс n есть номер строки, а нижний k — номер столбца. n-я строка $A^n=\{a_1^n, a_2^n, \ldots\}$ матрицы Теплица A определяет в пространстве R_1 линейный функционал $A^n\{x\} = a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \ldots$ Матрица Теплица A определяет в пространстве R_1 линейный оператор $A(x) = \{A^1(x), A^2(x), \ldots\}$. Две ограниченные последовательности, отличающиеся на последовательность, сходящуюся к нулю, переводятся матрицей Теплица A в последовательности, также отличающиеся на последовательность, сходящуюся к нулю. Отсюда следует, что хотя строка A^n и не определяет в R_2 функционала, но вся матрица Теплица A в целом определяет линейный оператор $A(x) = \{A^1(x), A^2(x) \ldots\}$ не только в R_1, но и в R_2. Нормы упомянутых операторов и функционалов очевидным образом выражаются через коэффициенты матрицы A:

$$|A^n| = |a_1^n| + |a_2^n| + \ldots; \quad |A| = \sup |A^n|; \quad \|A\| = \overline{\lim} |A^n|.$$

Первое из этих чисел называют нормой строки A^n, второе и третье — нормой матрицы A.

Рассмотрим множество $\mathfrak{A}$ ограниченных последовательностей, которые суммируются матрицей Теплица A. Его называют полем матрицы A. Если в $\mathfrak{A}$ ввести норму $|\ |$ (соотв. $\|\ \|$), то оно обращается в линейное подпространство $\mathfrak{A}_1 \subset R_1$ (соотв. $\mathfrak{A}_2 \subset R_2$). На множестве $\mathfrak{A}$ матрица A задает линейный функционал

$$\mathfrak{A}(x) = A^\infty(x) = \lim A^n(x) \quad (x \in \mathfrak{A})$$

— пределы, к которым матрица A суммирует ограниченные последовательности. Функционал $\mathfrak{A}(x)$, подобно оператору $A(x)$, определен как в $\mathfrak{A}_1$, так и в $\mathfrak{A}_2$. Нормы функционала $\mathfrak{A}(x)$ в R_1 и R_2, очевидно, совпадают. Обозначение функционала $A^\infty(x)$ через $\mathfrak{A}(x)$ имеет содержательный смысл. По теореме Мазура — Орлича [2], две матрицы Теплица, имеющие одинаковые ограниченные поля, суммируют ограниченные последовательности к одинаковым пределам. Поэтому функционал $\mathfrak{A}(x)$ вполне задан самим множеством $\mathfrak{A}$ (если только известно, что $\mathfrak{A}$ является ограниченным полем какой-либо матрицы Теплица) и не зависит от того, какую из матриц Теплица $A, A_*, \ldots$, имеющих $\mathfrak{A}$ своим ограниченным полем, мы используем для определения $\mathfrak{A}(x)$ через $A^\infty(x)$, $A^\infty_*(x), \ldots$ Норму оператора $\mathfrak{A}(x)$ называют нормой поля $\mathfrak{A}$.

Наконец, мы будем говорить, что на множестве $\mathcal{E}$ норма оператора или функционала P реализуется, если найдется точка $x \in \mathcal{E}$ такая, что норма или модуль $P(x)$ равна произведению нормы P на норму x.

Так например, нормы функционалов A^n реализуются в R_1, а норма оператора A реализуется в R_1 и R_2.

Теорема 1. *Норма ограниченного поля $\mathfrak{A}$ реализуется в точке x_a, для которой*

$$|x_a| = \|x_a\| = 1, \quad \mathfrak{A}(x_a) = \|\mathfrak{A}\| \quad (= |\mathfrak{A}|).$$

Теорема 2. *Норма ограниченного поля $\mathfrak{A}$ равна нижней грани норм матриц Теплица A, для которых $\mathfrak{A}$ служит ограниченным полем. Эта нижняя грань, как показал А. С. Кронрод, не всегда достигается.*

Смысл этих теорем состоит в следующем. Если матрица Теплица A суммирует последовательность x_1 из единичной сферы к пределу a_1, то норма матрицы A не меньше, чем a_1. А так как матрицы Теплица, суммирующие одни и те же последовательности, суммируют их к одинаковым пределам, то всякая суммируемая (матрицей A) последовательность x_1 (из единичной сферы) доставляет число $a_1 = A^\infty(x_1)$, ниже которого мы не можем «опустить» норму матрицы Теплица A_* (суммирующей те же ограниченные последовательности, что и A). Следовательно, мы не можем опустить норму матрицы A_* ниже верхней грани чисел $A^\infty(x_1)$. В теореме 1 доказывается, что числа $A^\infty(x_1)$ достигают своего максимума. Таким образом появляется последовательность x_a, доставляющая число $A^\infty(x_a)$, ниже которого невозможно опустить норму A_*. Теорема 2 показывает, что это в некотором смысле и единственное препятствие: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется матрица Теплица A_* (суммирующая те же ограниченные последовательности, что и A), имеющая норму меньшую, чем $A^\infty(x_a) + \varepsilon$.

При этом остается нерешенной следующая задача:

Задача. Пусть A — матрица Теплица. Рассмотрим множество матриц Теплица A_{**}, суммирующих все ограниченные последовательности, суммируемые матрицей A. Достигают ли нормы A_{**} своей нижней грани (равной норме ограниченного поля $\mathfrak{A}$)?

При доказательстве теорем используются две леммы, находящие много применений в теории матриц Теплица. Предпошлем им два определения.

Определение 1. Матрица Теплица A называется **нормальной**, если она: а) нормирована, т. е. $a_1^n + a_2^n + \ldots = 1$ при всех n; б) точно треугольна, т. е. $a_k^n = 0$ при $k < n$ и $a_n^n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$; в) усечена, т. е. каждый столбец $\{a_k^1, a_k^2, \ldots\}$ содержит только конечное число членов, отличных от нуля. В этом случае существует **грань усечения** матрицы A, т. е. такая целочисленная функция $s_* = s_*(s)$ $(s = 1, 2, \ldots)$, что

$$s_*(s) \leqslant s_*(s+1) \leqslant s_*(s) + 1 \leqslant s + 1, \quad s_*(s) \xrightarrow[s\to\infty]{} \infty;$$

$$a_k^s = 0, \quad \text{если} \quad k < s_*(s).$$

Определение 2. N-**преобразованиями** матрицы A называются следующие: а) повторение каждой строки матрицы A конечное (может быть, зависящее от номера строки) число раз; б) прибавление к матрице A матрицы H, у которой $\|H\|=0$.

Лемма 1 (нормализации). *Пусть дано конечное или счетное число матриц Теплица $\{A_i\}$. Применяя к ним N-преобразования, можно добиться того, чтобы все матрицы стали нормальны и имели общую грань усечения $s_*=s_*(s)$.*

Лемма 2 (переползания). *Пусть дано конечное или счетное число матриц Теплица $\{B_i\}$ и последовательность положительных чисел $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots$ В таком случае существует функция φ такая, что каждому счетному множеству последовательностей $x_1, x_2, \ldots$ и последовательности $n^1, n^2, \ldots$, удовлетворяющим условиям*

$$|x_k|\leqslant 1; \quad n^{k+1}\geqslant\varphi(n^k) \quad (k=1, 2, \ldots),$$

можно поставить в соответствие последовательность z, для которой $|z|\leqslant 1$ и

$$B_i^n(z)\lesseqgtr B_i^n(x_k)\pm\varepsilon^k \quad (i\leqslant k;\ n=n^k;\ k=1, 2, \ldots);$$

$$B_i^n(z)\lesseqgtr \frac{\max}{\min}\,[B_i^n(x_k), B_i^n(x_{k+1})]\pm\varepsilon^k \quad (i\leqslant k;\ n^k\leqslant n\leqslant n^{k+1}).$$

Лемма 1 дает возможность аппроксимировать пространство ограниченных последовательностей и матрицу Теплица конечномерными векторными пространствами и конечными матрицами. С помощью леммы 2 осуществляется предельный переход от аппроксимирующих пространств и матриц к пространству последовательностей и аппроксимируемой матрице Теплица. Лемма 2 вводит некую операцию «переползания», являющуюся своеобразным, допускаемым матрицами Теплица, замыканием на множестве ограниченных последовательностей. С ее помощью из произвольного счетного набора последовательностей $x_1, x_2, \ldots$ получается последовательность z, которая вначале совпадает с последовательностью x_1, затем, оставаясь заключенной между членами x_1 и x_2, постепенно переходит в x_2, на произвольно длинном отрезке совпадает с этой последовательностью, после чего, оставаясь заключенной между x_2 и x_3, произвольно медленно переходит в x_3 и т. д. Существенно при этом, что последовательность x можно построить так, чтобы для наперед заданных матриц Теплица B_i последовательности $B_i(z)$ вели себя таким же образом относительно последовательностей $B_i(x_1)$, $B_i(x_2), \ldots$ Из леммы 2, очевидно, вытекает цитированная теорема Мазура — Орлича. Лемма 2 позволяет понять и самый механизм, с помощью которого поле $\mathfrak{A}$ определяет пределы $\mathfrak{A}(x)$, к которым «оно» суммирует последовательности из $\mathfrak{A}$. Действительно, пусть x_1 — фиксированная последовательность из $\mathfrak{A}$. Рассмотрим всевозможные последовательности λe, где λ — произвольная константа, а последовательность $e=\{1, 1, \ldots\}$. Тогда для одной и только одной константы $\lambda=\lambda_1$ существуют последовательности из поля $\mathfrak{A}$, «переползающие» с последовательности x_1 на последовательность $\lambda_1 e$ и обратно бесконечное число раз и притом с произвольной медленностью. В таком случае $\mathfrak{A}(x_1)=\lambda_1$. Из леммы 2 легко вытекает теорема 1.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Пусть A — матрица Теплица, $\mathfrak{A}$ — ее ограниченное поле, число $N=|\mathfrak{A}|$ и число $\varepsilon>0$. Нам нужно построить матрицу A_* с ограниченным полем $\mathfrak{A}$ и нормой $|A_*|<N+\varepsilon$.

1. Согласно ([3]) для этого достаточно построить матрицу Теплица B с полем $\mathfrak{B}\supseteq\mathfrak{A}$ и нормой $|B|<N+\varepsilon$.

2. Согласно лемме 1 можно предполагать матрицу A нормальной без уменьшения общности доказательства.

3. Из условий теоремы вытекает, что два множества последовательностей x:

$$\mathcal{F} = \{\| A(x) - Ne \| \leqslant \delta\} \quad \text{и} \quad \mathcal{E} = \{\| x \| \leqslant 1 - \varepsilon\} \tag{1}$$

не пересекаются при достаточно малых $\delta > 0$. Действительно, в противном случае для каждого натурального τ существовала бы последовательность x_τ, для которой $\| x_\tau \| \leqslant 1 - \varepsilon$; $\| A(x_\tau) - Ne \| \leqslant \delta_\tau = 1 : \tau$. «Переползая» достаточно медленно с последовательности x_1 на x_2, с x_2 на x_3 и т. д., мы получим (см. лемму 2) последовательность z, для которой $\| E(z) \| \leqslant 1 - \varepsilon$; $\| A(z) - Ne \| = 0$. (Через E обозначена единичная матрица, так что $E(z) = z$.) Следовательно, для последовательности $x = z : (1 - \varepsilon)$ выполняются условия $\| x \| \leqslant 1$; $A^\infty(x) = N : (1 - \varepsilon)$, вопреки условиям теоремы.

4. Введем $k - s_*$-мерное пространство $R^k_{s_*}$ векторов $x = \{x^{s_*}, x^{s_*+1}, \ldots$ $\ldots, x^{k-1}\}$ с нормой $| x |^k_{s_*} = \sup\limits_{s_* \leqslant \varkappa < k} | x^\varkappa |$.

5. Обозначим грань усечения матрицы A через $s_* = s_*(s)$. Тогда при $\nu > s$ и любой последовательности x будет $A^\nu(x) = a^\nu_{s_*} x^{s_*} + a^\nu_{s_*+1} x^{s_*+1} + \ldots + a^\nu_\nu x^\nu$, вследствие чего функционалы A^ν для всех $s \leqslant \nu < k$ можно считать определенными на векторах пространства $R^h_{s_*}$ $(s_* = s_*(s))$.

6. Далее можно доказать вспомогательную лемму:

$$\underset{\varepsilon > 0}{(\varepsilon)}\ \underset{\delta > 0}{(E\delta)}\,(s)\ \underset{k > s}{(Ek)}\,[\mathcal{F}_s \cap \mathcal{E}_s = \Lambda].$$

Здесь $s_* = s_*(s)$, а $\mathcal{F}_s$ и $\mathcal{E}_s$ — тела из точек $x \in R^h_{s_*}$, удовлетворяющих условиям

$$\mathcal{F}_s = \{| A(x) - Ne |^k_s \leqslant \delta\}, \quad \mathcal{E}_s = \{| x |^k_{s_*} \leqslant 1 - \varepsilon\}. \tag{2}$$

Для доказательства можно зафиксировать s и δ, удовлетворяющее условию 3, и устремить $k \to \infty$. Если тела (2) при каждом k содержат общий вектор $\tilde{x}_k$, то из последовательности $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся по координатам к некоторой (бесконечной) последовательности $\{x^{s_*}, x^{s_*+1}, \ldots\}$. Легко видеть, что в этом случае последовательность $x = \{0, 0, \ldots, 0, x^{s_*}, x^{s_*+1}, \ldots\}$ входит в оба множества (1).

7. Во вспомогательной лемме зафиксируем ε, заданное в условиях теоремы, а числа δ и $k = k(s)$ выберем так, чтобы тела (2) не пересекались при всех $s = 1, 2, \ldots$

8. Зафиксируем натуральное число s и в $k - s_*(s)$-мерном пространстве $R^k_{s_*}$ проведем $k - s_* - 1$-мерную гиперплоскость Γ_s, разделяющую тела (2). Ее уравнение

$$\tilde{b}^s_{s_*} x^{s_*} + \tilde{b}^s_{s_*+1} x^{s_*+1} + \ldots + \tilde{b}^s_{k-1} x^{k-1} = d^s$$

можно пронормировать таким образом, чтобы $\tilde{b}^s_{s_*} + \ldots + \tilde{b}^s_{k-1} = 1$.

9. Введем матрицу $B = (b^s_\sigma)$, полагая: $b^s_\sigma = \tilde{b}^s_\sigma$ для $s_*(s) \leqslant \sigma < k - 1$ $(k = k(s))$; $b^s_k = 0$ в остальных случаях, и покажем, что она удовлетворяет условиям теоремы.

10. B есть матрица Теплица и $| B | \leqslant N : (1 - \varepsilon)$. Последнее вытекает из того, что гиперплоскость Γ_s не пересекается с $\mathcal{E}_s$.

11. Поле $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$. Это следует из того, что тело $\mathcal{F}_s$ заключено между гиперплоскостями Γ_s и $-\Gamma_s$.

Поступило
27 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Toeplitz, Prace Mat.-Fiz., **22**, 113 (1911). [2] S. Mazur, W. Orlicz, C. R., **196**, 32 (1933). [3] А. Л. Брудно, Матем. сборн., **16** (58), № 2, 205 (1945).