

Д. М. ЭЙДУС

ОЦЕНКИ МОДУЛЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 20 IV 1953)

Пусть Ω — конечная область с границей Γ в m -мерном пространстве переменных x_1, x_2, \dots, x_m . Рассмотрим задачу о собственных значениях для уравнения

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

при краевом условии $u|_{\Gamma} = 0$.

Обозначим через λ_n последовательность собственных значений и через u_n — соответствующую последовательность собственных функций, нормированную с помощью условия $\int_{\Omega} u_n^2 d\Omega = 1$.

В работе (1) доказано, что в области Ω имеет место неравенство

$$|u_n(x)| < c\lambda_n^k, \quad (1)$$

где $k = \left[\frac{m}{4} \right] + 1$ и c — постоянная.

В настоящей работе доказывается, что неравенство (1) имеет место при $k = m/4$. При этом предполагается, что Γ — поверхность Ляпунова. Далее устанавливается, что в любой области Ω_0 , содержащейся вместе с границей в Ω , неравенство (1) имеет место при $k = (m-1)/4$. При этом постоянная c зависит от области Ω_0 . Пример m -мерного шара показывает, что показатель $k = (m-1)/4$ не может быть уменьшен.

Переходя к доказательству этих утверждений, рассмотрим случай $m = 2$. Случай $m > 2$ рассматривается аналогично.

Пусть r — расстояние между точками x и y области Ω . Тогда для всякой функции $v(x)$, имеющей непрерывные производные первого порядка в замкнутой области $\Omega + \Gamma$ и непрерывные производные второго порядка в Ω , получим

$$v(x) = \int_{\Omega} (\Delta v + \lambda v) \varphi(r\sqrt{\lambda}) d\Omega_y - \int_{\Gamma} \left[\varphi(r\sqrt{\lambda}) \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial \varphi(r\sqrt{\lambda})}{\partial \nu} \right] d\Gamma_y, \quad (2)$$

где $\varphi(z) = {}_{1/4}N_0(z)$, ν — направление внешней нормали на Γ . Положим в (2) $\lambda = \lambda_n$, $v = u_n^2$, тогда

$$u_n^2(x) = \int_{\Omega} (2|\text{grad } u_n|^2 - \lambda_n u_n^2) \varphi(r\sqrt{\lambda_n}) d\Omega_y. \quad (3)$$

Зафиксируем некоторое число ε так, чтобы оно удовлетворяло неравенствам $0 < \varepsilon < 1$, $1/2\varepsilon^2 - \varepsilon^2 \ln \varepsilon < 1$. В (3) возьмем в качестве x точку x_n , в которой достигается наибольшее значение функции $|u_n(x)|$. Обозначим через Ω_n пересечение области Ω и внутренности круга T_n

радиуса $\varepsilon/\sqrt{\lambda_n}$ с центром в точке x_n и положим $\Omega_n'' = \Omega - \Omega_n'$. Из асимптотического разложения функции $N_0(z)$ следует, что при всех $z > 0$ имеет место неравенство

$$|N_0(z)| < \frac{c_1}{Vz} \quad * \quad (4)$$

Из (4) получим

$$\int_{\Omega_n''} (2|\text{grad } u_n|^2 - \lambda_n u_n^2) \varphi(r\sqrt{\lambda_n}) d\Omega_y < c_2 \lambda_n.$$

Далее, $\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \ln z + \psi(z)$, где $\psi(z)$ — целая функция, и имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} (2|\text{grad } u_n|^2 - \lambda_n u_n^2) \psi(r\sqrt{\lambda_n}) d\Omega_y &< c_3 \lambda_n; \\ \int_{\Omega_n} (2|\text{grad } u_n|^2 - \lambda_n u_n^2) \frac{\ln r\sqrt{\lambda_n}}{2\pi} d\Omega_y &\leq \int_{\Omega_n} \frac{\lambda_n}{2\pi} u_n^2 \ln \frac{1}{r\sqrt{\lambda_n}} d\Omega_y \leq \\ &\leq \frac{\lambda_n}{2\pi} u_n^2(x_n) \int_{\Gamma_n} \ln \frac{2}{r\sqrt{\lambda_n}} d\Omega = \frac{u_n^2(x_n)}{2} \left(\frac{1}{2} \varepsilon^2 - \varepsilon^2 \ln \varepsilon \right) < \frac{1}{2} u_n^2(x_n). \end{aligned}$$

Из (3) получим

$$|u_n(x)| < c\lambda_n^{1/2},$$

что доказывает наше утверждение.

Пусть теперь область Ω_0 содержится вместе с границей в Ω . Выберем области Ω_1 и Ω_2 так, что Ω_2 содержится вместе с границей в Ω ; Ω_1 содержится вместе с границей в Ω_2 и Ω_0 содержится вместе с границей в Ω_1 . Возьмем такую функцию $w(x)$, имеющую непрерывные производные второго порядка в Ω , что в $\Omega - \Omega_2$ $w(x) \equiv 0$; в Ω_1 $w(x) = 1$; в Ω $0 \leq w(x) \leq 1$. Положим теперь в (2) $\lambda = \lambda_n$ и $v = u_n w$. Тогда при $x \in \Omega_0$ получим

$$u_n(x) = \int_{\Omega_2 - \Omega_1} (u_n \Delta w + 2 \text{grad } u_n \text{ grad } w) \varphi(r\sqrt{\lambda_n}) d\Omega_y.$$

Отсюда, пользуясь неравенством (4) и неравенством Буяковского, получим

$$|u_n(x)| < c_0 \lambda_n^{1/4},$$

где постоянная c_0 зависит от области Ω_0 .

Заметим, что полученные результаты легко переносятся на случай уравнения $\Delta u + b(x)u + \lambda u = 0$, где функция $b(x)$ непрерывна в $\Omega + \Gamma$ и имеет непрерывные первые производные в Ω .

Ленинградский институт
авиационного приборостроения

Поступило
23 III 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Х. Л. Смолицкий, ДАН, 74, № 2 (1950).

* Ниже через c_i обозначаются постоянные.