Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 6

МАТЕМАТИКА

М. Г. ХАПЛАНОВ

К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ МАТРИЦ В АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 III 1953)

Интегральное уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{(C)} K(x, s)\, \varphi(s)\, ds, \tag{1}$$

в котором C — спрямляемая жорданова кривая, а ядро $K(x, s)$ непрерывно по обоим переменным, когда $x \in C$, $s \in C$, имеет непрерывное на C решение $\varphi(x)$ — и притом единственное — для всякой непрерывной на C функции $f(x)$ и для всех комплексных λ, кроме собственных значений уравнения (1), не имеющих предельной точки на конечном расстоянии.

Если в уравнении (1) C принадлежит границе некоторой области G, а ядро — аналитическая функция от x внутри G для каждого значения $s \in C$ и непрерывная функция от обоих переменных, когда $x \in G + C$, $s \in C$, то существует единственное решение $\varphi(x)$ уравнения (1), аналитическое внутри G и непрерывное в $G + C$, для всякой функции $f(x)$, обладающей теми же свойствами, и для всех λ, кроме собственных значений уравнения (1).

Наконец, если C лежит внутри G, $K(x, s)$ — аналитическая функция от x для каждого $s \in C$ и непрерывная функция от обоих переменных, когда $x \in G$, $s \in C$, то существует единственное решение $\varphi(x)$, аналитическое внутри G, для всякой аналитической внутри G функции $f(x)$ и для всех λ, кроме собственных значений уравнения (1).

Основываясь на этих замечаниях, докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Если $\{g_n(x)\}$ — полная система или нормальный* базис в пространстве функций, аналитических внутри области G, то функции*

$$h_n(x) = g_n(x) - \lambda \int\limits_{(C)} K(x, s)\, g_n(s)\, ds, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

также образуют, соответственно, полную систему или нормальный базис внутри G для всех λ, кроме собственных значений уравнения (1), если C — спрямляемая жорданова кривая, лежащая внутри G, а ядро $K(x, s)$ — аналитическая функция от x внутри G для каждого $s \in C$ и непрерывная функция от обоих переменных, когда $x \in G$, $s \in C$.

Действительно, произвольная аналитическая внутри G функция $f(x)$ может быть единственным способом представлена в виде

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int\limits_{(C)} K(x, s)\, \varphi(s)\, ds,$$

* Т. е. пространство коэффициентов разложения вместе с точкой $(a_0, a_1, \ldots)$ содержит точки $(a'_0, a'_1, \ldots)$, где $|a'_k| \leqslant |a_k|$, $k = 0, 1, \ldots$

если λ отлично от собственного значения уравнения (1), а $\varphi(x)$ есть решение его.

Если $\{g_n(x)\}$ — базис в G, то $\varphi(x)$ можно разложить в равномерно сходящийся внутри G ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(x).$$

Если $\{g_n(x)\}$ — полная система функций, то

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_0^{(n)} g_0(x) + a_1^{(n)} g_1(x) + \cdots + a_{k_n}^{(n)} g_{k_n}(x)\right].$$

Из последних равенств следует возможность разложения произвольной аналитической внутри G функции $f(x)$ в ряд по функциям $\{h_n(x)\}$ или по их линейным агрегатам.

Для случая базиса легко доказать единственность разложения.

Теорема 2. *Пусть спрямляемая жорданова кривая C принадлежит границе области G. Если $\{g_n(x)\}$ — полная система или нормальный базис в пространстве функций, аналитических внутри G и непрерывных в $G + C$, то функции*

$$h_n(x) = g_n(x) - \lambda \int_{(C)} K(x, s)\, g_n(s)\, ds, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

также образуют, соответственно, полную систему или нормальный базис в указанном пространстве для всех λ, кроме собственных значений уравнения (1), если ядро $K(x, s)$ — аналитическая функция от x внутри G для каждого $s \in C$ и непрерывная функция от обоих переменных, когда $x \in G + C$, $s \in C$.

Теорема 3. *Пусть*

$$f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

последовательность аналитических внутри круга $|x| < R$ функций, матрица которой M преобразует A_{R_1} в A_R, $R_1 < R$. Тогда для всех λ, кроме собственных значений уравнения (1) с ядром

$$K(x, s) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_j(x)}{s^{j+1}}, \tag{2}$$

последовательность функций

$$h_n(x) = x^n - \lambda f_n(x), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

есть квази-степенной базис в круге $|x| < R$; она образует полную систему во всякой области, содержащей $|s| = R_1$, в которой ядро $K(x, s)$ — аналитическая функция от x для всякой точки s на окружности $|s| = R_1$.

Возьмем произвольно $r < R$. Точки $v(1, z, z^2, \ldots)$, $|z| \leqslant r$, образуют ограниченное множество в $\bar{A}_{1/R}$ ([1]). Преобразование $u = vM$ переводит $\bar{A}_{1/R}$ в $\bar{A}_{1/R_1}$ и ограниченное множество $\{v\} \in \bar{A}_{1/R}$, $|z| \leqslant r$, в ограниченное множество $\{u\} \in \bar{A}_{1/R_1}$, где $u = vM = \{f_n(z)\}$, $|z| \leqslant r$ ([2]). Следовательно, существует точка $u' \in \bar{A}_{1/R_1}$, мажорирующая все точки множества $\{u\}$, т. е.

$$|f_n(x)| \leqslant |u'_n|, \quad |x| \leqslant r, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Следовательно, равенство (2) определяет функцию $K(x, s)$, удовлетворяющую всем условиям теоремы 1; остается заметить, что

$$h_n(x) = x^n - \lambda \int_{(C)} K(x, s) s^n ds = x^n - \lambda f_n(x).$$

Теорема 4. *Пусть*

$$f_n(x) = x^n + g_n(x), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

функции, аналитические в $|x| < R$, *а матрица последовательности* $\{g_n(x)\}$ *преобразует* A_{R_1} *в* A_R, $R_1 < R$. *Чтобы функции* $\{f_n(x)\}$ *образовали базис в* $|x| < R$, *необходимо и достаточно, чтобы они были линейно независимы в пространстве коэффициентов* A_R.

Необходимость линейной независимости очевидна. Для доказательства достаточности, рассмотрим интегральное уравнение (1) с ядром

$$K(x, s) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n - f_n(x)}{s^{n+1}}.$$

На основании предыдущей теоремы, функции $h_n(x) = f_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, образуют базис, если $\lambda = 1$ не есть собственное значение уравнения (1), т. е. если

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=R_1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n - f_n(x)}{s^{n+1}} \right) \varphi(s) ds$$

не имеет решения $\varphi(x)$, аналитического в $|x| < R$, отличного от нуля. Но последнее уравнение равнозначно условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} f_n(x) = 0.$$

В силу линейной независимости функций $f_n(x)$ в пространстве коэффициентов A_R, последнее равенство может иметь место только в том случае, если $\varphi^{(n)}(0), = 0$, $n = 0\,1, \ldots$, т. е. если $\varphi(x) \equiv 0$.

Теорема 5. *Пусть матрица* M *последовательности* $\{f_n(x)\}$ *преобразует* A_R *в* $\bar{A}_R$. *Тогда для всех* λ, *кроме собственных значений уравнения* (1) *с ядром* (2) *и кривой* C $|s| = R$, *функции* $x^n - \lambda f_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$, *образуют базис в пространстве функций, аналитических внутри* $|x| < R$ *и непрерывных в* $|x| \leqslant R$.

Действительно, точки $v(1, x, x^2, \ldots)$, $|x| \leqslant R$, образуют ограниченное множество в $A_{1/R}$. Преобразование $u = vM$ переводит пространство $A_{1/R}$ в $\bar{A}_{1/R}$ и множество $\{v\} \in A_{1/R}$, $|x| \leqslant R$, в ограниченное множество $\{u\} \in \bar{A}_{1/R}$, $u = \{f_n(x)\}$, $|x| \leqslant R$. Следовательно, существует точка $u' \in \bar{A}_{1/R}$ такая, что $|f_n(x)| \leqslant u'_n$, $n = 0, 1, \ldots$, $|x| \leqslant R$. Отсюда следует, что функция $K(x, s)$—аналитическая внутри $|x| < R$ и непрерывная в $|x| \leqslant R$ для всякой точки s на окружности $|s| = R$. Остается применить теорему 2.

Теорема 6. *Пусть* E — *нормальное пространство, обладающее свойствами*: а) *в* E *совокупность ортов образует ограниченное множество*; б) *в* E *и в* E^* *всякое ограниченное множество точек мажорируется одной точкой.*

Если $\{g_n(x)\}$ — *базис в круге* $|x| \leqslant R$ *с коэффициентами из* E, *а матрица* M *последовательности* $\{f_n(x)\}$ *преобразует* E *в* A_{R_1}, $R_1 > R$, *то функции* $\{g_n(x) - \lambda f_n(x)\}$ *для всех* λ, *кроме собственных значений уравнения* (1) *с ядром* (3), *указанным ниже, образуют* *базис в любом круге* $|x|<r$, $R<r<R_1$; *они образуют полную систему во всякой области* G, *в которой* $\{g_n(x)\}$ *есть полная система, а ядро* (3) — *аналитическая функция от* x *для каждого* s, $|s|=r$, $r>R$.

Пусть N — матрица базиса $\{g_n(x)\}$; следовательно, N преобразует E в $\overline{A}_R$ и имеет обратную матрицу N^{-1}, преобразующую $\overline{A}_R$ в E. Обозначим:

$$N=\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01}\ldots \\ a_{10} & a_{11}\ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix},\quad N^{-1}=\begin{pmatrix} b_{00} & b_{01}\ldots \\ b_{10} & b_{11}\ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix} c_{00} & c_{01}\ldots \\ c_{10} & c_{11}\ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Согласно свойствам а) и б), столбцы матриц N мажорируются одной точкой $\alpha(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)\in \overline{A}_R$. Следовательно, функции $g_n(x)$ — аналитические в круге $|x|<R_2$, $R_2>R$.

Строчки матрицы N^{-1} принадлежат $A_{1/R}$. Поэтому функции

$$\omega_k(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_{kn}}{s^{n+1}},\quad k=0, 1, 2, \ldots,$$

аналитические для $|s|>R$.

Очевидно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=r} g_n(s)\,\omega_k(s)\,ds=\begin{cases}1, & \text{если } n=k;\\ 0, & \text{если } n\neq k;\end{cases}\quad R<r<R_2.$$

Положим

$$K(x, s)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\,\omega_k(s). \tag{3}$$

Точки $w\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{s^2}, \ldots\right)$ для $|s|=r$, $r>R$, мажорируются точкой $\rho\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}, \ldots\right)\in \overline{A}_R$; поэтому они образуют ограниченное множество в $\overline{A}_R$ и преобразуются в ограниченное множество точек $\{N^{-1}w\}=\{\omega_k(s)\}$, $|s|=r$, в пространстве E; согласно б), существует точка $\beta(\beta_0, \beta_1, \ldots)\in E$, для которой $|\omega_k(s)|\leqslant\beta_k$, $|s|=r$, $k=0, 1, 2, \ldots$

Точки $v(1, x, x^2, \ldots)$, $|x|\leqslant r_1$, $r_1<R_1$, образуют ограниченное множество $\overline{A}_{1/R_1}$ и преобразуются в ограниченное множество точек $\{vM\}=\{f_k(x)\}$, $|x|\leqslant r_1$, в пространстве E^*; согласно б), существует точка $\gamma(\gamma_0, \gamma_1, \ldots)\in E^*$, для которой $|f_k(x)|\leqslant\gamma_k$, $|x|\leqslant r_1$, $k=0, 1, \ldots$

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\beta_k\gamma_k$ сходится; поэтому ряд (3) сходится равномерно для $|x|\leqslant r_1$, $|s|=r$. Следовательно, $K(x, s)$—аналитическая функция от x внутри $|x|<R_1$ для каждой точки s на окружности $|s|=r$, $R<r<R_1$, и непрерывная функция от обоих переменных x и s.

Согласно теореме 1, функции $\{g_n(x)-\lambda f_n(x)\}$ образуют базис в любом круге $|x|<r$, если $R<r<R_1$.

В частности, если $g_n(x)=x^n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, то $E=\overline{A}_R$, матрица M последовательности $\{f_n(x)\}$ преобразует $\overline{A}_R$ в A_{R_1}, $R_1>R$, и функции $\{x^n-\lambda f_n(x)\}$ для всех λ, кроме собственных значений ядра (3), образуют базис в любом круге $|x|<r$, $R<r<R_1$.

Ростовский государственный университет
им. В. М. Молотова

Поступило
1 II 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Хапланов, ДАН, **79**, № 6 (1951). [2] М. Г. Хапланов, ДАН, **80**, № 1 (1951).