Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 6

МАТЕМАТИКА

В. М. МАЙОРОВ

ИНВАРИАНТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ОБОБЩЕННО-ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ СЕТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 11 IV 1953)

В настоящей статье указываются некоторые дифференциально-топологические свойства шестиугольной конфигурации ([1]) в двумерном римановом многообразии. Аналитический признак, характеризующий эту конфигурацию, используется для построения характеристики сетей, названных нами обобщенно-потенциальными (определение см. в тексте), являющихся обобщением «потенциальных систем» Д. Ф. Егорова ([2]). При исследовании применяется бескоординатный («прямой») метод, используемый для теории римановых многообразий в работах А. М. Лопшица (см., например, ([3])).

Теорема 1. *Для того чтобы линии тока трех полей единичных векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{u}$ *представляли шестиугольную конфигурацию, необходимо и достаточно, чтобы вектор*

$$\vec{\chi}+\frac{N\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\nabla\lg\dfrac{\sin(\widehat{\mathbf{b},\mathbf{u}})}{\sin(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{u}})}}{\mathbf{a}N\mathbf{b}}$$

был градиентным, где $\vec{\chi}$ — *третий чебышевский вектор* ([1]) (*обращение его в нуль характеризует чебышевскую сеть*); $\mathbf{xy}$ — *скалярное произведение векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$; $\nabla\varphi$ — *градиент скалярного поля* φ, *а оператор* N *производит поворот вектора на угол* $\pi/2$.

Доказательство. Как известно ([1]), для того чтобы линии тока трех полей единичных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{u}$ представляли шестиугольную конфигурацию, необходимо и достаточно, чтобы два из полей $\mathbf{a}\sin(\widehat{\mathbf{b},\mathbf{u}})$, $\mathbf{b}\sin(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{a}})$, $\mathbf{u}\sin(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$ допускали множитель λ, который делает эти поля соленоидальными. Отсюда получим:

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}(\lambda\mathbf{a}\sin(\widehat{\mathbf{b},\mathbf{u}}))=0,\\&\operatorname{div}(\lambda\mathbf{b}\sin(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{a}}))=0,\end{aligned}\tag{1}$$

где $\operatorname{div}\mathbf{x}\equiv x^{\alpha}_{|\alpha}$ (вертикальная черта обозначает ковариантное дифференцирование), откуда

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\nabla\lg\lambda&=-\operatorname{div}\mathbf{a}-\mathbf{a}\nabla\lg\sin(\widehat{\mathbf{b},\mathbf{u}}),\\\mathbf{b}\nabla\lg\lambda&=-\operatorname{div}\mathbf{b}-\mathbf{b}\nabla\lg\sin(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{a}}).\end{aligned}\tag{2}$$

Используя равенство

$$\frac{N\mathbf{a}\cdot\operatorname{div}\mathbf{b}-N\mathbf{b}\cdot\operatorname{div}\mathbf{a}}{\mathbf{a}N\mathbf{b}}=-\vec{\chi}-\nabla\lg\sin 2\omega,$$

получим, после исключения скаляра λ из (2), следующий признак шестиугольной конфигурации:

$$\operatorname{rot}\left\{\vec{\chi}+\frac{\mathbf{a}\nabla\lg\sin(\widehat{\mathbf{b},\mathbf{u}})\cdot N\mathbf{b}-\mathbf{b}\nabla\lg\sin(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{a}})\cdot N\mathbf{a}}{\mathbf{a}N\mathbf{b}}\right\}=0, \tag{3}$$

(где $\operatorname{rot}\mathbf{x}\equiv\operatorname{div}N\mathbf{x}$), или, в силу градиентности вектора $\nabla\lg\sin(\widehat{\mathbf{b},\mathbf{u}})$:

$$\operatorname{rot}\left\{\bar{\chi}+\frac{N\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\nabla\lg\dfrac{\sin(\widehat{\mathbf{b},\mathbf{u}})}{\sin(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{u}})}}{\mathbf{a}N\mathbf{b}}\right\}=0, \tag{4}$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Замечание. Если ввести в рассмотрение вектор $\mathbf{v}$, связанный с вектором $\mathbf{u}$ соотношением:

$$\mathbf{v}=\frac{\mathbf{u}N\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{u}N\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}N\mathbf{b}}, \tag{5}$$

то удается убедиться в том, что признак (4) шестиугольной конфигурации можно записать в виде

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{u}\cdot\operatorname{div}\mathbf{v}-\mathbf{v}\cdot\operatorname{div}\mathbf{u}}{\mathbf{u}N\mathbf{v}}=0. \tag{6}$$

Теорема 2. *Если для трех полей единичных векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{u}$ *выполнены два из трех условий:*

1) *линии тока полей векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{u}$ *представляют шестиугольную конфигурацию;*

2) *линии тока полей векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *образуют ромбическую сеть;*

3) *скалярное поле* $\dfrac{\sin(\widehat{\mathbf{b},\mathbf{u}})}{\sin(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{u}})}$ *мультипликативно-диагонально* относительно сети, образованной линиями тока векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$, *то справедливо третье.*

Доказательство. Как известно [1], ромбическая сеть характеризуется градиентностью третьего чебышевского вектора, т. е. равенством

$$\operatorname{rot}\vec{\chi}=0, \tag{7}$$

а скалярное поле φ, мультипликативно-диагональное относительно сети, — равенством:

$$\operatorname{rot}\frac{N\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\nabla\lg\varphi}{\mathbf{a}N\mathbf{b}}=0. \tag{8}$$

Из равенств (4), (7), (8) непосредственно получим теорему (2).

---

* Поле φ мультипликативно-диагонально относительно сети, если для любого криволинейного четырехугольника $ABCD$ (A и C — противоположные вершины), образованного этими кривыми, имеет место равенство

$$\varphi(A)\cdot\varphi(C)=\varphi(B)\cdot\varphi(D).$$

Обобщенно-потенциальной сетью будем называть такую, в параметрах которой квадрат линейного элемента может быть приведен к виду

$$ds^2 = \frac{\partial w}{\partial u} du^2 + 2f\, du\, dv + \frac{\partial w}{\partial v} dv^2 \quad (\omega = \omega(u, v)).$$

Теорема 3. *Обобщенно-потенциальная (не чебышевская) сеть характеризуется тем, что линии тока второго чебышевского вектора образуют с двумя семействами линий сети шестиугольную конфигурацию.*

Доказательство. Рассмотрим второй чебышевский вектор произвольной сети [1] (обращение его в нуль характеризует чебышевскую сеть). Принимая данную сеть за координатную и используя обычные обозначения (см. [4], стр. 132), получим:

$$\sigma^1 = -\frac{1}{2\gamma}\frac{\partial \gamma_{22}}{\partial u^1}, \qquad \sigma^2 = \frac{1}{2\gamma}\frac{\partial \gamma_{11}}{\partial u^2},$$

где σ^1 и σ^2 — контравариантные компоненты вектора $\vec{\sigma}$; γ_{ij} — метрический тензор, а $\gamma = \mathrm{Det}\,\gamma_{ij}$. Следовательно,

$$\vec{\sigma} = \sigma^\alpha \mathbf{r}_\alpha = \frac{1}{2\gamma}\left(-\frac{d\gamma_{22}}{du^1}\mathbf{r}_1 + \frac{\partial\gamma_{11}}{\partial u^2}\mathbf{r}_2\right). \tag{9}$$

Учитывая, что для обобщенно-потенциальной сети $\partial\gamma_{22}/\partial u^1 = \partial\gamma_{11}/\partial u^2$, получим: вектор $\vec{\sigma}$ параллелен $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Поэтому линии тока этого вектора определяются уравнением $u^1 + u^2 = \mathrm{const}$, откуда и следует, что семейство линий тока вектора $\vec{\sigma}$ совместно с координатными семействами $u^1 = \mathrm{const}$, $u^2 = \mathrm{const}$ образуют шестиугольную конфигурацию.

Обратно, если для некоторой сети линии тока вектора $\vec{\sigma}$ могут быть выражены уравнением $u^1 + u^2 = \mathrm{const}$, то вдоль этих линий векторы $d\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{\partial\gamma_{22}}{\partial u^1}\mathbf{r}_1 - \frac{\partial\gamma_{11}}{\partial u^2}\mathbf{r}_2\right)$ будут параллельны. Следовательно, $\partial\gamma_{22}/\partial u^1 = \partial\gamma_{11}/\partial u^2$, т. е. сеть обобщенно-потенциальная, ч. т. д.

Полученный аналитический признак шестиугольной конфигурации приводит к следующей инвариантной характеристике обобщенно-потенциальной сети:

$$\mathrm{div}\ \frac{\vec{\sigma}\cdot \mathrm{div}\,\mathbf{t} - \mathbf{t}\cdot\mathrm{div}\,\vec{\sigma}}{\vec{\sigma} N \mathbf{t}} = 0,$$

где вектор $\mathbf{t}$ связан с вектором $\vec{\sigma}$ таким же соотношением, каким вектор $\mathbf{v}$ связан с вектором $\mathbf{u}$ [5].

Так как для ортогональной сети вектор $\mathbf{t}$ совпадает с первым чебышевским вектором $\vec{\tau}$, то получим, в силу (10), известную характеристику потенциальной системы сети Д. Ф. Егорова [1].

Установленная характеристика позволяет получить следующие предложения:

Теорема 4. *Изогональная обобщенно-геодезическая сеть (линии одного семейства имеют постоянную кривизну, одинаковую для всех линий этого семейства, а линии другого семейства также одинаковую для всех линий второго семейства) является обобщенно-потенциальной.*

Теорема 5. *Для того чтобы сеть равных путей была ромбической, необходимо и достаточно, чтобы она была обобщенно-потенциальной.*

Теорема 6. *Сеть в плоскости Лобачевского, образованная двумя семействами параллельных прямых, является обобщенно-потенциальной сетью.*

В заключение отметим, что для произвольной обобщенно-потенциальной сети, заданной тензором сети φ_{ij}, мы можем считать также известным и ее второй чебышевский вектор $\vec{\sigma}$; поэтому, в силу теоремы Ли об интегрируемости в квадратурах ([5], стр. 139), дифференциальное уравнение такой сети

$$\varphi_{ij}\, du^i\, du^j = 0$$

интегрируется в квадратурах (для потенциальной сети это отмечено в ([1], стр. 28).

Ярославский государственный
педагогический институт
им. К. Д. Ушинского

Поступило
7 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. С. Дубнов, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, в. 9 (1952). [2] Д. Ф. Егоров, Уч. зап. Московск. ун-та, в. 18 (1901). [3] А. М. Лопшиц, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, в. 2—3 (1934). [4] В. Ф. Каган, Основы теории поверхностей, 1, М.—Л., 1947. [5] G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Curven, 1901.