Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 6

МАТЕМАТИКА

П. П. КОРОВКИН

О СХОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 25 IV 1953)

Пусть $\varphi_n(x, y)$, $n = 1, 2, \ldots,$ — функция, определенная в квадрате $R\{a \leqslant x, y \leqslant b\}$, не убывающая относительно аргумента y при всяком закрепленном значении аргумента x.

Положим

$$L_n(f) = \int_a^b f(y)\, d\varphi_n(x, y) = f_n(x). \tag{1}$$

Теорема 1. *Если $L_n(Y^k)$, $k = 0, 1, 2$, равномерно на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ сходится к x^k, то $L_n(f)$ равномерно сходится к $f(x)$, если $f(x)$ — функция, непрерывная на этом отрезке.*

Доказательство. Положим

$$\begin{gathered} \int_a^b d\varphi_n(x, y) = 1 + \alpha_n(x), \\ \int_a^b Y d\varphi_n(x, y) = x + \beta_n(x), \\ \int_a^b Y^2 d\varphi_n(x, y) = x^2 + \gamma_n(x). \end{gathered} \tag{2}$$

По условию теоремы, функции $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$ и $\gamma_n(x)$ равномерно стремятся к нулю. Следовательно,

$$\int_a^b (y - x)^2\, d\varphi_n(x, y) = x^2 + \gamma_n(x) - 2x(x + \beta_n(x)) + x^2(1 + \alpha_n(x)) =$$

$$= \gamma_n(x) - 2x\beta_n(x) + x^2\alpha_n(x) = \theta_n(x),$$

где $\theta_n(x)$ равномерно стремится к нулю.

Теперь имеем

$$\delta^2 \int\limits_{|x-y| \geqslant \delta} d\varphi_n(x, y) \leqslant \int\limits_{|x-y| \geqslant \delta} (y - x)^2\, d\varphi_n(x, y) \leqslant \theta_n(x),$$

т. е.

$$\int\limits_{|x-y| \geqslant \delta} d\varphi_n(x, y) = \frac{\theta_n(x)}{\delta^2} = \widetilde{\theta}_n(x) \tag{3}$$

равномерно стремится к нулю при всяком $\delta > 0$.

Отсюда и из (2) следует, что интеграл (1) сингулярный, и поэтому теорема доказана.

Пусть $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ — функции, непрерывные на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и такие, что полином

$$F(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$$

имеет не более двух нулей на этом отрезке, если только хотя бы один из коэффициентов a_0, a_1, a_2 отличен от нуля. Такую систему из трех функций называют системой Чебышева.

Теорема 2. *Если $L_n(f_k)$, $k = 0, 1, 2$ равномерно сходится к $f_k(x)$ и $\{f_k(x)\}_0^2$ — система Чебышева на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, то $L_n(f)$ равномерно сходится к $f(x)$, если $f(x)$ — функция, непрерывная на этом отрезке.*

Теорема 3. *Если три непрерывные функции $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ не образуют системы Чебышева, то существует функция $\varphi(x, y)$, удовлетворяющая тем же условиям, что и функция $\varphi_n(x, y)$, и такая, что*

$$L(f_k) = \int_a^b f_k(x)\, d\varphi(x, y) \equiv f_k(x), \quad k = 0, 1, 2,$$

и найдется непрерывная на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ функция $f(x)$ такая, что

$$L(f) \not\equiv f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Доказательство. По условию теоремы найдется полином

$$F(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x),$$

имеющий на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ не менее трех нулей, в то время как среди коэффициентов a_0, a_1, a_2 есть отличные от нуля.

Пусть x_0, x_1, x_2 — корни полинома $F(x)$. Имеем

$$\sum_{k=0}^{2} a_k f_k(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2.$$

Следовательно, определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_0(x_0) & f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f_0(x_1) & f_1(x_1) & f_2(x_1) \\ f_0(x_2) & f_1(x_2) & f_2(x_2) \end{vmatrix} = 0.$$

В силу этого однородная система

$$\sum_{k=0}^{2} \lambda_k f_i(x_k) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \tag{4}$$

с тем же определителем Δ имеет решения, отличные от нулевых.

Так как система (4) однородна, то числа $c\lambda_0$, $c\lambda_1$, $c\lambda_2$ будут решениями системы, если λ_0, λ_1, λ_2 — решения.

В силу этого можно найти решения λ_0, λ_1, λ_2 такие, что два из них будут неотрицательны и $|\lambda_k| < 1$, $k = 0, 1, 2$. Пусть, для определенности,

$$-1 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2, \quad \lambda_1 \geqslant 0.$$

Определим функцию $\varphi(x, y)$ следующим образом: функция $\varphi(x, y)$ есть функция скачков относительно аргумента y при всяком закрепленном значении аргумента x, причем $\varphi(x, y)$ имеет один скачок в точке $y = x$, равный 1, если $x \neq x_0$. Если же $x = x_0$, то функция $\varphi(x_0, y)$ имеет скачок $1 + \lambda_0$ в точке $y = x_0$, λ_1 в точке $y_1 = x_1$ и λ_2 в точке $y_2 = x_2$.

Имеем
$$L(f) = \int_a^b f(y)\, d\varphi(x, y) = f(x), \quad x \neq x_0; \tag{5}$$

$$L(f) = \int_a^b f(y)\, d\varphi(x_0, y) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{2} \lambda_k f(x_k); \tag{6}$$

из (5), (6) и (4) следует, что $L_n(f_k) \equiv f_k(x)$, $k = 0, 1, 2$.

Если $\lambda_0 \neq 0$, то, взяв $f(x)$ равной нулю в точках x_1 и x_2 и не равной нулю в точке x_0, получим из (6), что $L_n(f) \not\equiv f(x)$.

Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_2 > 0$. Берем $f(x)$ отличной от нуля в точке $x = x_2$ и равной нулю в точках $x = x_0$, $x = x_1$. Из (6) получим, что $L(f) \not\equiv f(x)$.

Следствие 1. Теорема 2 не будет иметь места, если функции $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, о которых идет речь в ее условии, не образуют системы Чебышева.

Следствие 2. Теорема 2 не будет иметь места, если в ее условии брать не три, а меньшее число функций.

Пусть для трех функций $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, непрерывных на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, выполнены условия: 1) $f_k(a) = f_k(b)$, $k = 0, 1, 2$; 2) полином $F(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)$ имеет не более двух нулей на множестве $a \leqslant x \leqslant b$; если только не все его коэффициенты равны нулю, то систему функций $\{f_k(x)\}_0^2$ называют ω-периодической системой Чебышева, $\omega = b - a$.

Теорема 4. *Если $L_n(f_k)$, $k = 0, 1, 2$, равномерно сходится к $f_k(x)$ и $\{f_k(x)\}_0^2$ — ω-периодическая система Чебышева, то $L_n(f)$ равномерно сходится к $f(x)$, какова бы ни была непрерывная и ω-периодическая функция $f(x)$.*

Теорема 5. *Если для чисел $\rho_k^{(n)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, выполнены условия:*

$$1)\ \lim_{n \to \infty} \rho_0^{(n)} \to 1; \quad 2)\ \lim_{n \to \infty} \rho_1^{(n)} \to 1; \quad 3)\ \sum_{k=0}^{n} \rho_k^{(n)} \cos kx \geqslant 0,$$

то последовательность операторов

$$L_n(f) = \rho_0^{(n)} a_0 + \sum_{k=1}^{n} \rho_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где $a_0 + \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — частная сумма ряда Фурье функции $f(x)$, равномерно сходится к $f(x)$, если $f(x)$ непрерывная и 2π-периодическая функция.

Доказательство. *Легко показывается, что*

$$L_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{k=0}^{n} \rho_k^{(n)} \cos k(y - x)\, dy.$$

Отсюда и условия 3) следует, что $L_n(f)$ — положительный оператор.

Но, в силу условий 1) и 2),

$$L_n(1) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{n} \rho_k^{(n)} \cos k(y - x)\, dx = \rho_0^{(n)} \to 1;$$

$$L_n(\cos y) = \rho_1^{(n)} \cos x \to \cos x; \quad L_n(\sin y) = \rho_1^{(n)} \sin x \to \sin x.$$

Из последних соотношений и теоремы 4 следует теорема 5.

Следствие. Если выполнены условия теоремы 5, то

$$\lim_{n\to\infty} \rho_k^{(n)} = 1, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Доказательство. В силу теоремы 5, имеем

$$L_n(\cos kx) = \rho_k^{(n)} \cos kx \to \cos kx, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \rho_k^{(n)} = 1.$$

Замечание 1. Теорема 5 доказывалась ранее при бóльших предположениях. Именно, кроме условий теоремы, указанных нами, требовали выполнения выводов последнего следствия.

Замечание 2. В теоремах 2 и 4 можно заменить слова: «равномерная сходимость на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$» словами: «сходимость в точке x отрезка $a \leqslant x \leqslant b$» и получить вытекающие отсюда следствия о сходимости и равномерной сходимости на некотором множестве отрезка.

Калининский государственный
педагогический институт
им. М. И. Калинина

Поступило
23 II 1953