**Доклады Академии Наук СССР**
**1953. Том XC, № 6**

*МАТЕМАТИКА*

М. П. ЗЮЗЬКО

# О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА $-\Delta u + cu$ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ

*(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 25 IV 1953)*

В этой работе будут доказаны следующие три теоремы, являющиеся обобщением соответствующих теорем работы А. Я. Повзнера ([1]) по спектральной теории оператора $Bu = -\Delta u + c(p)u$ для евклидова пространства размерности не больше трех, на случай евклидова пространства произвольного числа измерений.

Малыми буквами латинского алфавита будут обозначаться в работе векторы $n$-мерного евклидова пространства $E_n$ с началом в начале координат, а также точки, являющиеся концами этих векторов; $|P|$ — длина вектора P; $dp$ — элемент объема; $K_r$ — шар с центром в нуле и радиуса $r$; $\Delta$ — лапласиан $\left(\Delta u(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right)$.

Рассматривается оператор $Bu = -\Delta u + c(p)u$, где $c(p)$ — непрерывная функция в $E_n$.

За область определения $D_B$ оператора $B$ берется совокупность всех финитных функций, т. е. таких, которые дважды непрерывно дифференцируемы и вне некоторой сферы равны нулю.

Теорема 1. *Резольвента $R_\lambda$ любого самосопряженного расширения $A$ оператора $B$ есть интегральный оператор. Ядро $H(p, q; \lambda)$ этого оператора обладает следующими свойствами:*

1) *$H(p, q; \lambda)$ имеет в точке $p = q$ особенность не выше $(n-2)$-го порядка, т. е.*

$$\left| |p-q|^{n-2} H(p, q; \lambda) \right| = O(1),$$

*если точки $p$ и $q$ достаточно близки;*

2) *при фиксированном $p$ и любом $\varepsilon > 0$*

$$\int\limits_{E_n - \omega_\varepsilon} |H(p, q; \lambda)|^2 \, dq < \infty,$$

*где $\omega_\varepsilon$ — сфера с центром в точке $p$ и радиуса $\varepsilon$;*

3) *$H(p, q; \lambda) = \overline{H(q, p; \bar{\lambda})}$;*

4) *$H(p, q; \lambda)$ есть функция, непрерывная по совокупности переменных $(p, q)$ во всем пространстве, если $p \neq q$;*

5) *в случае, если* $c(p)$ *один раз непрерывно дифференцируема, то* $H(p, q; \lambda)$ *удовлетворяет уравнению*

$$-\Delta H + c(p) H = \lambda H, \tag{1}$$

*где оператор* $\Delta$ *применяется по* $p$.

В более общем случае уравнение (1) может быть заменено некоторым интегральным уравнением.

Пусть $A$ есть некоторое самосопряженное расширение оператора $B$ и пусть $\mathscr{E}_t$ — разложение единицы, отвечающее $A$.

Теорема 2. *Разложение единицы* $\mathscr{E}_t$ *порождается некоторой спектральной функцией* $\vartheta(p, q; \mu)$, *т. е.*

$$(\mathscr{E}_\beta - \mathscr{E}_\alpha) f = \int\limits_{E_n} [\vartheta(p, q; \beta) - \vartheta(p, q; \alpha)] f(q)\, dq.$$

Теорема 3. *Пусть* $\vartheta(p, q; \mu)$ — *спектральная функция некоторого самосопряженного расширения* $A$ *оператора* $B$.

*Существует такая неубывающая функция* $\tau(\mu)$ *и функция* $\psi(p, q; \mu)$, *что*

а) $\psi(p, q; \mu)$ *равностепенно непрерывна по совокупности переменных* $(p, q)$, *если* $p$, $q$ *меняются в ограниченной области, а* $\mu$ *заключена в некотором конечном интервале*;

б) $\int\limits_{D_1}\int\limits_{D_2}\int\limits_a^b |\psi(p, q; \mu)|\, dp\, dq\, d\tau(\mu) < \infty$, *если области* $D_1$, $D_2$ *и интервал* $(a, b)$ *ограничены*;

в) $\Delta_{\alpha,\beta}\vartheta(p, q; \mu) = \int\limits_\alpha^\beta \psi(p, q; \mu)\, d\tau(\mu)$ $((\alpha, \beta) \subset (a, b))$, *где* $\Delta_{\alpha,\beta}\vartheta(p, q; \mu) = \vartheta(p, q; \beta) - \vartheta(p, q; \alpha)$.

При обобщении теорем работы ([1]) на случай пространства $E_n$ $(n > 3)$ методы доказательств непосредственно не переносятся, так как в работе ([1]) существенно использовалась принадлежность к $L^2$ функции Грина задачи Дирихле уравнения $\Delta u = 0$, что не имеет места, если $n > 3$.

Для доказательства сформулированных выше теорем существенную роль играет следующая лемма.

Лемма. *Если* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu+1}$ — *любые комплексные точки верхней (или нижней) полуплоскости, где* $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]$, *то*

$$R_{\lambda_1} R_{\lambda_2} \ldots R_{\lambda_{\nu+1}} f = \int\limits_{E_n} \mathscr{H}(p, q; \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu+1}) f(q)\, dq$$

*и*

$$\mathscr{H}(p, q; \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu+1}) = \underbrace{\int\limits_{E_n} \cdots \int\limits_{E_n}}_{\nu} H(p, s_1; \lambda_1) \ldots H(s_\nu, q; \lambda_{\nu+1})\, ds_1 \ldots ds_\nu$$

*есть функция непрерывная по совокупности переменных* $(p, q)$ *и* $\mathscr{H}(p, q; \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu+1}) \in L^2$ *по каждому из переменных* $p$, $q$.

Укажем вкратце, как на основании этой леммы получить доказательство наличия спектральной функции, т. е. доказательство теоремы 2.

Пусть $A$ — некоторое самосопряженное расширение оператора $B$ и $\mathscr{E}_t$ — разложение единицы, отвечающее $A$. Пусть $\Delta_{\alpha,\beta} g = (\mathscr{E}_\beta - \mathscr{E}_\alpha) g$ $(\beta > \alpha)$, $f \in L^2$, $\mathscr{E} g = g$.

Из тождества

$$\Delta_{\alpha,\beta} f = (A - \lambda_{\nu+1}\mathscr{E})(A - \lambda_\nu \mathscr{E}) \ldots (A - \lambda_1 \mathscr{E}) R_{\lambda_1} R_{\lambda_2} \ldots R_{\lambda_{\nu+1}} \Delta_{\alpha,\beta} f$$

получим:

$$\Delta_{\alpha,\beta} f = \int_\alpha^\beta (t - \lambda_{\nu+1}) \ldots (t - \lambda_1)\, d_t (\mathscr{E}_t R_{\lambda_1} \ldots R_{\lambda_{\nu+1}} f). \tag{2}$$

Но

$$\mathscr{E}_t R_{\lambda_1} \ldots R_{\lambda_{\nu+1}} f = R_{\lambda_1} \ldots R_{\lambda_{\nu+1}} \mathscr{E}_t f =$$

$$= \int_{E_n} \Big( \underbrace{\int_{E_n} \cdots \int_{E_n}}_{\nu} H(p, s_1; \lambda_1) \ldots H(s_\nu, q; \lambda_{\nu+1})\, ds_1 \ldots ds_\nu \Big) \mathscr{E}_t f(q)\, dq =$$

$$= \int_{E_n} \mathscr{E}_t f(q)\, \mathscr{H}(p, q; \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu+1})\, dq,$$

где

$$\mathscr{H}(p, q; \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu+1}) = \underbrace{\int_{E_n} \cdots \int_{E_n}}_{\nu} H(p, s_1; \lambda_1) \ldots H(s_\nu, q; \lambda_{\nu+1})\, ds_1 \ldots ds_\nu,$$

и так как, по сформулированной выше лемме, $\mathscr{H}(p, q; \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu+1}) \in L^2$ по $q$, то при фиксированных $p$ и $\lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu+1)$ $\mathscr{H}(p, q; \lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_{\nu+1})$ есть элемент из $L^2$.

Поэтому

$$\mathscr{E}_t R_{\lambda_1} \ldots R_{\lambda_{\nu+1}} f = (\mathscr{E}_t f, \overline{\mathscr{H}(p, q; \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu+1})}),$$

и из (2) получаем:

$$\Delta_{\alpha,\beta} f = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \lambda_{\nu+1}) \ldots (t - \lambda_1)\, d_t (\mathscr{E}_t \Delta_{\alpha,\beta} f, \overline{\mathscr{H}(p, q; \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu+1})}) =$$

$$= ((A - \lambda_{\nu+1}\mathscr{E}) \ldots (A - \lambda_1 \mathscr{E}) \Delta_{\alpha,\beta} f, \overline{\mathscr{H}(p, q; \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu+1})}) =$$

$$= (f, (A - \bar{\lambda}_1 \mathscr{E}) \ldots (A - \bar{\lambda}_{\nu+1} \mathscr{E}) \Delta_{\alpha,\beta} \overline{\mathscr{H}(p, q; \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu+1})}).$$

Обозначая

$$\vartheta(p, q; \mu) = (A - \bar{\lambda}_1 \mathscr{E}) \ldots (A - \bar{\lambda}_{\nu+1} \mathscr{E}) \Delta_{0,\mu} \overline{\mathscr{H}(p, q; \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu+1})},$$

получим:

$$\Delta_{\alpha,\beta} f = (f, [\overline{\vartheta(p, q; \beta)} - \overline{\vartheta(p, q; \alpha)}])$$

или

$$\Delta_{\alpha,\beta} f = \int_{E_n} f(q) \cdot \Delta_{\alpha,\beta} \vartheta(p, q; \mu)\, dq,$$

где $\Delta_{\alpha,\beta}\vartheta(p, q; \mu) = \vartheta(p, q; \beta) - \vartheta(p, q; \alpha)$, что и доказывает наличие спектральной функции.

В случае $n$-мерного евклидова пространства спектральная функция обладает теми же свойствами, что и в случае пространства числа измерений не больше трех ([1]).

Доказательство теоремы 3 проводится на основании тех же лемм, что и в работе ([1]), справедливость которых при $n > 3$ вытекает из сформулированной выше леммы.

Харьковский
государственный университет

Поступило
23 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Повзнер, Матем. сборн., 32, вып. 1 (1952).