Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 6

МАТЕМАТИКА

А. А. ГРИБ

# ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА—ДАРБУ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

*(Представлено академиком В. И. Смирновым 11 IV 1953)*

В различных практически интересных задачах, где встречается необходимость интегрирования линейного дифференциального уравнения второго порядка гиперболического типа, часто удается, путем соответствующей аппроксимации коэффициентов этого уравнения, свести его к уравнению Эйлера—Дарбу с целыми коэффициентами и таким образом приближенно получить общий интеграл в конечном виде [1-4].

В настоящей заметке путем замены переменных устанавливается новый вид уравнения Эйлера—Дарбу, являющийся обобщением общепринятого. Тем самым возможности для вышеупомянутой аппроксимации значительно расширяются.

1. Под уравнением Эйлера—Дарбу обычно подразумевают уравнение вида [5]:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} + \frac{A}{\xi_1 + \eta_1}\frac{\partial Z}{\partial \xi_1} + \frac{B}{\xi_1 + \eta_1}\frac{\partial Z}{\partial \eta_1} = \frac{C}{(\xi_1 + \eta_1)^2} Z, \tag{1}$$

где $A$, $B$, $C$ — постоянные.

Пусть $A$, $B$, $C$ таковы, что

$$m = A + \alpha, \quad n = B + \alpha \tag{2}$$

целые положительные числа ($m = 1, 2, \ldots$; $n = 1, 2, \ldots$); $\alpha$ — один из корней уравнения

$$\alpha^2 + (A + B - 1)\alpha - C = 0. \tag{3}$$

Общий интеграл (1) записывается в виде:

$$Z = (\xi_1 + \eta_1)^\alpha \frac{\partial^{m+n-2}}{\partial \xi_1^{n-1} \partial \eta_1^{m-1}} \frac{F_1(\xi_1) + F_2(\eta_1)}{\xi_1 + \eta_1}, \tag{4}$$

где $F_1(\xi_1)$ и $F_2(\eta_1)$ — произвольные функции.

Заменой переменных

$$\xi_1 = f_1(\xi), \quad \eta_1 = f_2(\eta), \tag{5}$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ — произвольные достаточно гладкие функции, уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{A f_2'(\eta)}{f_1(\xi) + f_2(\eta)}\frac{\partial Z}{\partial \xi} + \frac{B f_1'(\xi)}{f_1(\xi) + f_2(\eta)}\frac{\partial Z}{\partial \eta} = \frac{C f_1'(\xi) f_2'(\eta)}{[f_1(\xi) + f_2(\eta)]^2} Z. \tag{6}$$

Заменой

$$Z = [f_1(\xi) + f_2(\eta)]^{\alpha} U, \tag{7}$$

где $\alpha$ удовлетворяет уравнению (3), уравнение (6) сводится к следующему:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{m f_2'(\eta)}{f_1(\xi) + f_2(\eta)} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{n f_1'(\xi)}{f_1(\xi) + f_2(\eta)} \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0. \tag{8}$$

Общий интеграл (8) имеет вид

$$U(\xi, \eta, n, m) = \left(\frac{1}{f_1'(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{(n-1)} \left(\frac{1}{f_2'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^{(m-1)} \frac{F_1(\xi) + F_2(\eta)}{f_1(\xi) + f_2(\eta)}, \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered} \left(\frac{1}{f_1'(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{(n-1)} = \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial \xi_1^{n-1}} = \frac{1}{f_1'} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{f_1'} \frac{\partial}{\partial \xi} \cdots \frac{1}{f_1'} \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ \left(\frac{1}{f_2'(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^{(m-1)} = \frac{\partial^{(m-1)}}{\partial \eta_1^{m-1}} = \frac{1}{f_2'} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{f_2'} \frac{\partial}{\partial \eta} \cdots \frac{1}{f_2'} \frac{\partial}{\partial \eta}, \end{gathered} \tag{10}$$

и, следовательно, решение (6)

$$Z = [f_1(\xi) + f_2(\eta)]^{\alpha} U(\xi, \eta, n, m). \tag{11}$$

В случае целых и отрицательных $m$ и $n$ общий интеграл (6) записывается в виде:

$$Z = [f_1(\xi) + f_2(\eta)]^{\alpha+1-m-n} U(\xi, \eta, 1-m, 1-n). \tag{12}$$

Для нецелых $m$ и $n$ общий интеграл (1) и (6) также можно написать в явном виде, однако вследствие его сложного вида он неудобен для решения краевых задач.

Уравнение (6) можно считать обобщением уравнения Эйлера — Дарбу. Выражения (11) и (12) — его общие интегралы при целых $m$ и $n$.

2. Если в дифференциальном уравнении вида

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi \partial \eta} + P(\xi, \eta) \frac{\partial Z}{\partial \xi} + Q(\xi, \eta) \frac{\partial Z}{\partial \eta} = R(\xi, \eta) Z \tag{13}$$

коэффициенты $P$, $Q$, $R$ можно аппроксимировать при помощи двух функций $f_1(\xi)$, $f_2(\eta)$ и трех постоянных $A$, $B$, $C$ таким образом, чтобы

$$P(\xi, \eta) \approx A \frac{\partial}{\partial \eta} \ln t; \quad Q(\xi, \eta) \approx B \frac{\partial}{\partial \xi} \ln t; \quad R(\xi, \eta) \approx C \frac{\partial}{\partial \xi} \ln t \frac{\partial}{\partial \eta} \ln t, \tag{14}$$

где

$$t = f_1(\xi) + f_2(\eta), \tag{15}$$

то уравнение (13) можно приближенно заменить уравнением Эйлера — Дарбу (6).

Очевидно, (14) будет точно удовлетворяться, если

$$f_1(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{Q}{B} e^{\int \frac{Q}{B} d\xi + \frac{P}{A} d\eta} d\xi; \quad f_2(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{P}{A} e^{\int \frac{Q}{B} d\xi + \frac{P}{A} d\eta} d\eta; \tag{16}$$

при этом

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{P}{A} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{Q}{B}. \tag{17}$$

Так как $\partial f_1 / \partial \eta = 0$, $\partial f_2 / \partial \xi = 0$, то на $P$, $Q$, $R$ накладываются следующие условия:

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} + Q\frac{P}{A} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial \xi} + P\frac{Q}{B} = 0; \quad R = \frac{C}{AB} PQ. \tag{18}$$

При $A = B = 1$ и $R = 0$ условия (18) совпадают с условиями существования у уравнения (13) обобщенных функционально-инвариантных решений, полученными Н. П. Еругиным ([6]) и С. В. Валландером ([7]).

При $R \neq 0$ условия существования обобщенных функционально-инвариантных решений для (13) имеют вид ([6]):

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial Q}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial P}{\partial \xi} + PQ + R = 0. \tag{19}$$

Полагая в (19) $P = \frac{\partial}{\partial \eta} \ln t$, $Q = \frac{\partial}{\partial \xi} \ln t$, получим:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \xi \, \partial \eta} = -Rt. \tag{20}$$

Таким образом, линейное уравнение, обладающее обобщенным функционально-инвариантным решением, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi \, \partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \ln t \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \ln t \frac{\partial Z}{\partial \eta} = RZ, \tag{21}$$

где $t$ — интеграл уравнения (20), а $R = R(\xi, \eta)$ — произвольная непрерывная функция.

Общий интеграл (21) есть

$$Z = \frac{1}{t}[F_1(\xi) + F_2(\eta)]. \tag{22}$$

В частности, при

$$R = -\frac{n(n-1)}{[f_1(\xi) + f_2(\eta)]^2} f_1'(\xi) f_2'(\eta) \tag{23}$$

$$t = [f_1(\xi) + f_2(\eta)]^n U(\xi, \eta, n-1, n-1). \tag{24}$$

Лишь при $R = 0$ уравнение, обладающее обобщенным функционально-инвариантным решением, совпадает с уравнением Эйлера — Дарбу ($A = B = 1$; $C = 0$).

Если же в (13) $P = \frac{\partial}{\partial \eta} \ln t$, $Q = \frac{\partial}{\partial \xi} \ln t$, $R = R(\xi, \eta)$, $t = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, то

$$Z = \frac{1}{t} X, \tag{25}$$

где $X$ — интеграл уравнения

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \xi \, \partial \eta} = RX. \tag{26}$$

Пользуясь решением обобщенного уравнения Эйлера — Дарбу, можно конструировать решения довольно сложных линейных уравнений. Так например, общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi \, \partial \eta} + \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \ln X t^A\right) \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \ln X t^B\right) \frac{\partial Z}{\partial \eta} = C\left(\frac{\partial}{\partial \xi} \ln t \frac{\partial}{\partial \eta} \ln t\right) Z, \tag{27}$$

где $t = f_1(\xi) + f_2(\eta)$; $X = \frac{\partial^{(B-1)} \partial^{(A-1)}}{\partial \xi_1^{B-1} \partial \eta^{A-1}} \frac{1}{t} [\psi_1(\xi) + \psi_2(\eta)]$; $\xi_1 = f_1(\xi)$; $\eta_1 = f_2(\eta)$; $f_1(\xi) \neq \psi_1(\xi)$; $f_2(\eta) \neq \psi_2(\eta)$, есть

$$Z = t^{\alpha} \frac{U(\xi, \eta, n, m)}{X}. \tag{28}$$

Недавно С. В. Валландер [8] построил некоторый класс нелинейных уравнений гиперболического типа, обладающих обобщенным функционально-инвариантным решением, заключающий в себе (21). Используя данные настоящей статьи, легко можно построить класс нелинейных гиперболических уравнений, общее решение которых выражается через производные от произвольных функций:

$$N(\xi, \eta, Z) = t^{\alpha} U(\xi, \eta, n, m), \tag{29}$$

где $N$ — некоторая функция переменных $\xi, \eta, Z$; $t = f_1(\xi) + f_2(\eta)$. Эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi\,\partial\eta} + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\ln\frac{\partial N}{\partial Z}t^A\right)\frac{\partial Z}{\partial\xi} + \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\ln\frac{\partial N}{\partial Z}t^B\right)\frac{\partial Z}{\partial\eta} + \left(\frac{\partial}{\partial Z}\ln\frac{\partial N}{\partial Z}\right)\frac{\partial Z}{\partial\xi}\frac{\partial Z}{\partial\eta} +$$

$$+ \frac{1}{\partial N/\partial Z}\frac{\partial^2 N}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{A}{\partial N/\partial Z}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\ln t\right)\frac{\partial N}{\partial\xi} + \frac{B}{\partial N/\partial Z}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\ln t\right)\frac{\partial N}{\partial\eta} -$$

$$- \frac{C}{\partial N/\partial Z}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\ln t\,\frac{\partial}{\partial\eta}\ln t\right)N = 0. \tag{30}$$

3. Для практики представляет интерес случай, когда в уравнении (13) $P = P(\xi+\eta)$, $Q = Q(\xi+\eta)$, $R = R(\xi+\eta)$. В этом случае на $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ в (14) и (15) накладываются ограничения вида

$$\frac{f_1''(\xi)}{f_1'(\xi)} = -\frac{f_2''(\eta)}{f_2'(\eta)} = \frac{f_1'(\xi) - f_2'(\eta)}{f_1(\xi) + f_2(\eta)} = K, \tag{31}$$

где $K$ — постоянное число. Из (31) имеем:

$$f_1(\xi) = \frac{1}{K}e^{K(\xi+C_1)} + C_3; \quad f_2(\eta) = -\frac{1}{K}e^{-K(\eta+C_2)} + C_4; \quad K(C_3+C_4)=0, \tag{32}$$

и, следовательно,

$$P(\xi+\eta) = \frac{AK}{e^{K(\xi+\eta+C)} - 1}; \quad Q(\xi, \eta) = \frac{BKe^{K(\xi+\eta+C)}}{e^{K(\xi+\eta+C)} - 1}. \tag{33}$$

$Z$ определяется согласно (11).

При $P(\xi+\eta) = Q(\xi+\eta)$ имеем:

$$P = \frac{A}{\xi+\eta+C}. \tag{34}$$

Уравнение (13) в этом случае приближенно может быть заменено лишь обычным уравнением Эйлера — Дарбу вида (1).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
8 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Христианович, Прикладн. матем. и мех., 11, в. 2 (1947). [2] С. В. Филькович, там же, 11, в. 4 (1947). [3] А. А. Гриб, ДАН, 83, № 1 (1952). [4] Д. М. Волков, И. П. Гинзбург, Вестн. ЛГУ, № 6 (1952). [5] G. Darboux, Leçons sur la théorie générale de surfaces, 2-me partie, Paris, 1889. [6] Н. П. Еругин, Уч. зап. ЛГУ, в. 16 (1949). [7] С. В. Валландер, ДАН, 83, № 5 (1952). [8] С. В. Валландер, ДАН, 89, № 2 (1953).