Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 6

МАТЕМАТИКА

Т. И. АМАНОВ

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОГО РЕЗУЛЬТАТА С. М. НИКОЛЬСКОГО

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 13 IV 1953)

1. Пусть σ — единичный (открытый) круг с центром в начале координат. Будем говорить, что функция двух переменных $f(x, y)$, заданная и измеримая на σ, принадлежит к классу $W_2^{(m)}(\sigma)$, если: а) она имеет на σ все частные производные до m-го порядка включительно; б) сама f и все эти частные производные имеют на σ интегрируемые квадраты, т. е.

$$D_0[f] \equiv \iint_\sigma f^2(x, y)\,dx\,dy < \infty; \quad D_j[f] \equiv \iint_\sigma \sum_{\alpha+\beta=j} \frac{j!}{\alpha!\,\beta!}\left(\frac{\partial^j f}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta}\right)^2 dx\,dy < \infty$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m).$$

В дальнейшем вместо $\lim\limits_{\rho\to 1-0} F(\rho, \theta) = \varphi(\theta)$ почти всюду будем писать: $F|_{\rho=1} = \varphi$.

2. В этой заметке будут доказаны следующие теоремы, доказанные при $m = 1$ С. М. Никольским ([1]).

Теорема 1. *Пусть U — гармоническая на σ функция, принадлежащая к $W_2^{(m)}(\sigma)$, $m \geqslant 1$. Тогда*

$$U = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \tag{1}$$

где a_k, b_k суть коэффициенты Фурье функции $\varphi = U|_{\rho=1}$, и имеет место неравенство

$$\sum_{k=m}^{\infty} k^{2m-1}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant C_1 D_m[U]. \tag{2}$$

Обратно, из сходимости ряда $\sum k^{2m-1}(a_k^2 + b_k^2)$ следует, что гармоническая на σ функция (1) принадлежит к $W_2^{(m)}(\sigma)$ и имеет место неравенство

$$C_2 D_m[U] \leqslant \sum_{k=m}^{\infty} k^{2m-1}(a_k^2 + b_k^2). \tag{3}$$

(Положительные константы C_1, C_2 не зависят от U).

Теорема 2. *Пусть U — гармоническая на σ функция, принадлежащая к $W_2^{(m)}(\sigma)$, $m \geqslant 1$. Тогда*

$$U|_{\rho=1} = \varphi \in H_2^{*(m-1/2)}$$

с некоторой константой M.*

Теорема 3. *Пусть 2π-периодическая функция*

$$\varphi(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta$$

принадлежит к классу $H_2^{*(m-1/2+\varepsilon)}(M)$, $\varepsilon \geqslant 0$, $m \geqslant 1$. Если U — гармоническая на σ функция, удовлетворяющая граничному условию $U|_{\rho=1}=\varphi$, то при $\varepsilon > 0$ $U \in W_2^{(m)}(\sigma)$ и

$$D_m[U] \leqslant \frac{cM^2}{\varepsilon}, \tag{4}$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от ε и M, при $\varepsilon = 0$ среди функций, принадлежащих к классу $H_2^{*(m-1/2)}$, но не принадлежащих к $H_2^{*(m')}$, $m' > m - 1/2$, имеются и такие, для которых соответствующий интеграл $D_m[U] < \infty$, и такие, для которых $D_m[U] = \infty$.

Рассмотрим при данном $\varepsilon > 0$ класс функций $\varphi \in H_2^{*(m-1/2+\varepsilon)}(M)$. Обозначим через $M_\varepsilon(\varphi)$ наименьшее среди чисел M. Рассматриваемый класс образует функциональное пространство типа (B) с метрикой $\|\tilde{\varphi}\| = M_\varepsilon(\varphi)$. Обозначим это пространство через $H_{(\varepsilon;\, m)}$. Как показывает теорема 3, решение задачи Дирихле устойчиво в следующем смысле: если φ_1 и φ_2 сколь угодно близки в метрике $H_{(\varepsilon;\, m)}$, то для гармонической на σ функции U, удовлетворяющей граничному условию $U|_{\rho=1} = \varphi_1 - \varphi_2$, интеграл $D_m[U]$ будет сколь угодно мал.

3. В дальнейшем нам понадобится следующая лемма:

Лемма. *Пусть функция $U(x, y)$ имеет на σ достаточное число непрерывных частных производных.*

Если $x + iy = \rho e^{i\theta}$, то

$$\frac{\partial^n U}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{s+t=j} \frac{P_{\alpha,\beta}^{(s,t)}(\theta)}{\rho^{n-j+s}} \frac{\partial^j U}{\partial \rho^t \, \partial \theta^s}, \tag{5}$$

$$S_n[U] \equiv \sum_{\alpha+\beta=n} \frac{n!}{\alpha!\,\beta!} \left(\frac{\partial^n U}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta}\right)^2 \geqslant \left(\frac{\partial^n U}{\partial \rho^n}\right)^2, \tag{6}$$

где $P_{\alpha,\beta}^{(s,t)}(\theta)$ — тригонометрические полиномы порядка $\alpha + \beta = n$, не зависящие от U.

Доказательство формулы (5) проводится методом индукции. Неравенство (6) доказывается с помощью формулы (5), при этом используется тот факт, что $S_n(U)$ представляет собой положительно определенную квадратичную форму относительно частных производных

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n U}{\partial x^n}, \ldots, \frac{\partial^n U}{\partial y^n}.$$

---

* Определение классов $H_2^{*(r)}$ см. в ([3]).

4. Доказательство теоремы 1. Пусть $U \in W_2^{(m)}(\sigma)$, $m \geqslant 1$. Тогда, в силу теоремы 1 ([1]) С. М. Никольского, $U|_{\rho=1} = \varphi$ принадлежит по меньшей мере к $H_2^{*(1/2)}$, откуда следует справедливость представления (1). Из (1) находим

$$\iint_\sigma \left(\frac{\partial^m U}{\partial \rho^m} \right)^2 \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{\pi}{2} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{[k(k-1)\ldots(k-m+1)]^2}{k-m+1} (a_k^2 + b_k^2),$$

что с помощью (6) дает неравенство (2).

Чтобы доказать вторую часть теоремы, обозначим

$$U_\mu = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\mu} \rho^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

Так как

$$\iint_\sigma \left(\frac{1}{\rho^{m-j+s}} \frac{\partial^j (U_{\mu+\nu} - U_\mu)}{\partial \rho^t \, \partial \theta^s} \right)^2 \rho \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{k=\mu+1}^{\mu+\nu} \frac{[k(k-1)\ldots(k-t+1) k^s]^2}{k-\mu} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant C_3 \sum_{k=\mu+1}^{\mu+\nu} k^{2j-1} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \sum_{k=\mu+1}^{\mu+\nu} k^{2m-1} (a_k^2 + b_k^2) \to 0, \quad \mu \to \infty,$$

равномерно относительно ν $(s+t=j;\ j=1, 2, \ldots, m)$, то, в силу (5):

$$D_m [U_{\mu+\nu} - U_\mu] \leqslant C_4 \sum_{k=\mu+1}^{\mu+\nu} k^{2m-1} (a_k^2 + b_k^2) \to 0, \quad \mu \to \infty,$$

равномерно относительно ν. Отсюда следует, что $U \in W_2^{(m)}(\sigma)$. Чтобы доказать (3), достаточно представить U в виде

$$U = U_1 + U_2 \quad \left(U_1 = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m-1},\quad U_2 = \sum_{k=m}^{\infty} \right)$$

и заметив, что U_1 — гармонический полином степени $(m-1)$, применить к интегралу $D_m[U_2] = D_m[U]$ формулу (5). Действительно,

$$D_m [U_2] \leqslant C_6 \sum_{j=1}^{m} \sum_{s+t=j} \iint_\sigma \left(\frac{1}{\rho^{m-j+s}} \frac{\partial^j U_2}{\partial \rho^t \, \partial \theta^s} \right)^2 \rho \, d\rho \, dt =$$

$$= C_6 \sum_{j=1}^{m} \sum_{s+t=j} \frac{\pi}{2} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{[k(k-1)\ldots(k-t+1) k^s]^2}{k-m+1} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant$$

$$\leqslant C_7 \sum_{k=m}^{\infty} k^{2m-1} (a_k^2 + b_k^2).$$

Доказательство теоремы 2. В силу (2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2m-1} (a_k^2 + b_k^2) < \infty,$$

и теорема следует из неравенства

$$\left(\int_0^{2\pi} |\varphi^{(m-1)}(\theta+h)-\varphi^{(m-1)}(\theta)|^2\,d\theta\right)^{1/2}\equiv$$

$$\equiv\left(4\pi\sum_{k=1}^{\infty}k^{2(m-1)}(a_k^2+b_k^2)\sin^2{}^1/_2\,kh\right)^{1/2}\leqslant\sqrt{2\pi\sum_{k=1}^{\infty}k^{2m-1}(a_k^2+b_k^2)}\,|h|^{1/2}, \quad (7)$$

справедливого для любых h.

Доказательство теоремы 3. Если $\varphi\in H_2^{*(m-1/2+\varepsilon)}(M)$, то, в силу тождества (7), для любых h справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{2(m-1)}(a_k^2+b_k^2)\sin^2{}^1/_2\,kh\leqslant\frac{M^2}{4\pi}|h|^{1+2\varepsilon},$$

откуда, деля обе части на h^2 и интегрируя по h от 0 до 1, получим

$$\sigma_m(\varphi)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}k^{2m-1}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{\pi}{8}\frac{M^2}{\varepsilon}. \quad (8)$$

Из (8) в силу (3) следует (4).

При $\varepsilon=0$ легко показать, что функции

$$\psi(\theta)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos\left(k\theta+(m-1)\frac{\pi}{2}\right)}{k^m(\ln k)^{\frac{1+\alpha}{2}}}\quad(0<\alpha<{}^1/_2);$$

$$f(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos N^{2k}\theta}{N^{(2m-1)k}}\quad(N\text{ — целое})$$

принадлежат к классу $H_2^{*(m-1/2)}$, но не принадлежат к $H_2^{*(m')}$, $m'>m-{}^1/_2$, и для них $\sigma_m(\psi)<\infty$, $\sigma_m(f)=\infty$, откуда, в силу (2), следует утверждение теоремы.

5. Заметим, что с помощью некоторых вспомогательных предложений теоремы 2 и 3 можно получить, исходя из теорем 1 и 2 С. М. Никольского (2). Однако при этом интеграл $D_m[U]$ оценивается с другой константой, в которой величина ε, стоящая в знаменателе (4), не выделяется*.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
6 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, ДАН, 83, № 1 (1952). [2] С. М. Никольский, ДАН, 88, № 3 (1953). [3] Т. И. Аманов, ДАН, 88, № 3 (1953).

* Пользуюсь случаем отметить, что в заметке (3) на стр. 391, 8 строка снизу и в формуле (14) вместо $M_{\varepsilon_2}(\psi)$ надо читать $M_{\varepsilon_2}(\psi)+\|\psi\|_{L_2}$.