Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 5

ТЕПЛОТЕХНИКА

Б. Н. ДЕВЯТОВ

ПЕРЕХОДНЫЕ РЕЖИМЫ РАБОТЫ НЕПРЕРЫВНОДЕЙСТВУЮЩИХ ТЕПЛООБМЕННИКОВ

(Представлено академиком М. В. Кирпичевым 7 IV 1953)

В настоящем сообщении дается уравнение переходного процесса в теплообменниках в случае изменения начальных параметров его режима и проводится решение этого уравнения операционным методом. Используется эффективный прием преобразования Лапласа, многочисленным примерам применения которого посвящена монография [1]. При самой общей постановке задачи показана разрешимость ее в общем виде для любых начальных и граничных условий. Как иллюстрация приводится решение для частного случая прохождения единичного толчкообразного возмущения лишь по одной из движущихся сред в теплообменнике. Вопрос об устойчивости режима работы теплообменников связан с общей задачей соблюдения постоянного режима ряда непрерывнодействующих аппаратов (абсорберов, колонн ректификации, экстракторов и др., в число которых входят и теплообменные аппараты). Хотя все рассуждения приводятся для теплообменников, они полностью справедливы для всех вышеуказанных аппаратов, где вместо температуры будет концентрация.

Исследования реакции непрерывнодействующего аппарата на возмущения, даваемые на входе, представляют интерес с точки зрения вопроса о «проницаемости» системы для тех или иных возмущений и отсюда устойчивости режима ее работы без наличия регулятора. Эти же исследования будут служить основой для характеристики аппарата с точки зрения регулируемости его режима. По реакции системы на единичное толчкообразное возмущение (кривая саморегулирования) должны проводиться современные расчеты автоматического регулирования этого объекта, в частности, конкретно рассматриваемого здесь непрерывнодействующего теплообменника.

Пусть u и v — температуры горячей и холодной среды, x — координата сечения аппарата, отсчитываемая в направлении движения среды u. Если в течение времени t идеально перемешиваемые участки жидкости соприкасаются друг с другом по некоторой поверхности раздела с тепловым сопротивлением, то

$$\frac{du}{dt} = k_1 (v - u), \quad \frac{dv}{dt} = k_2 (u - v),$$

где k_1, k_2 — положительные постоянные коэффициенты.

В применении к движущимся элементарным участкам сред в теплообменнике около сечения x будем иметь следующие соотношения для случая противоточного теплообмена:

$$\frac{u(x-\Delta x, t+\Delta t)-u(x, t)}{\Delta t}=\frac{u(x-\Delta x, t+\Delta t)\, u(x-\Delta x, t)}{\Delta t}+$$

$$+\frac{[u(x-\Delta x, t)-u(x, t)]}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta}\rightarrow\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt},$$

откуда

$$k_1(v-u)-\frac{\partial u}{\partial x}w_1=\frac{\partial u}{\partial t};$$

$k_1=kp/s_1c_1\gamma_1$; k — коэффициент теплопередачи; p — периметр поперечного сечения поверхности раздела сред; s_1 — площадь поперечного сечения первой среды; c_1 — теплоёмкость; γ_1 — удельный вес; w_1 — абсолютная величина линейной скорости первой среды.

Аналогично получаем соотношения для другой среды. Таким образом, приходим к системе уравнений в частных производных для нестационарной теплопередачи в противоточных теплообменниках:

$$k_1(v-u)-w_1\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t},\quad k_2(u-v)+w_2\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial t};\qquad \text{(I)}$$

k_2 — соответствующий коэффициент для второй среды; w_2 — абсолютная величина линейной скорости второй среды.

Уравнения для прямоточного теплообменника получаются из уравнений (I) заменой w_2 на $-w_2$. Решения этих уравнений будут зависеть от начальных и граничных условий:

$$u(x, 0)=u(x),\quad v(x, 0)=v(x);$$

$$u(0, t)=\varphi_1(t),\quad v(0, t)=\psi_1(t)\quad \text{для прямотока;}$$

$$u(0, t)=\varphi_2(t),\quad v(l, t)=\psi_2(t)\quad \text{для противотока,}$$

где l — длина аппарата.

Методом операционного исчисления задача может быть решена для любых начальных и граничных условий для прямо- и противотока. Покажем это на примере противотока, где за начальное распределение температур взято стационарное распределение, соответствующее k_1, k_2, скоростям w_1', w_2' и постоянным температурам на входах u_1, v_1. Граничным условием для возмущенного при $t=0$ процесса считаем

$$u(0, t)=u_0=\text{const},\quad v(l, t)=v_0=\text{const}.$$

Пусть скорости w_1', w_2' в момент времени $t=0$ скачкообразно меняются на w_1, w_2. Для начальных условий в уравнениях (I) положим $\partial u/\partial t=\partial v/\partial t=0$; получим уравнения стационарного процесса:

$$k_1(v-u)-w_1'\frac{du}{dx}=0,\quad k_2(u-v)+w_2'\frac{dv}{dx}=0.$$

Решение запишется в виде*:

$$u(x)=c_1'k_1+c_2'k_1e^{mx},\quad v(x)=c_1'k_1+c_2'\frac{w_1'}{w_2'}k_2e^{mx},$$

где $m=(w_1'k_2-w_2'k_1)/w_1'w_2'$; c_1', c_2' — постоянные интегрирования, которые находятся по граничным условиям.

* Выражения получаются такими же, как и в случае вывода конечной формулы через величину средней логарифмической разности температур (2).

Определив таким образом начальные и граничные условия переходного процесса, перейдем к решению уравнений (I).

При помощи преобразования Лапласа от уравнений в частных производных (I) с двумя независимыми переменными переходим к неоднородной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и одной независимой переменной x:

$$k_1(V-U)-w_1\frac{dU}{dx}=pU-u(x),\quad k_2(U-V)+w_2\frac{dV}{dx}=pV-v(x), \qquad \text{(II)}.$$

где $U=\int\limits_0^\infty e^{-pt}u(x,t)\,dt=U(x)$, $V=\int\limits_0^\infty e^{-pt}v(x,t)\,dt=V(x)$. Граничные условия для этой системы уравнений получаются преобразованием Лапласа из граничных условий для уравнений (I): $U(0)=\frac{1}{p}u_0$, $V(l)=\frac{1}{p}v_0$. Находим общее решение для системы (II):

$$\begin{aligned} U&=-k_1c_{(1)}e^{\lambda(1)x}-k_1c_{(2)}e^{\lambda(2)x}+\frac{a}{p}+\frac{bp+\mu}{(p+a_1)(p+b_1)}e^{mx},\\ V&=[+]\,c_{(1)}e^{\lambda(1)x}+[-]\,c_{(2)}e^{\lambda(2)x}+\frac{a}{p}+\frac{dp+\eta}{(p+a_1)(p+b_1)}e^{mx}, \end{aligned} \qquad \text{(III)}$$

где $a=c_1'k_1$, $b=c_2'k_1$, $d=c_2'\frac{w_1'}{w_2'}k_2$, $\lambda_{(1),(2)}=A+Bp\pm C\sqrt{(p+D)^2-\mathscr{E}}$,

$[\pm]=A_1+B_1p\pm B_1\sqrt{(p+D)^2-\mathscr{E}}$, $A=\frac{w_1k_2-w_2k_1}{2w_1w_2}$, $B=-\frac{w_1-w_2}{2w_1w_2}$,

$C=\frac{w_1+w_2}{2w_1w_2}$, $D=\frac{w_1k_2+w_2k_1}{w_1+w_2}$, $\mathscr{E}=\frac{4w_1w_2k_1k_2}{(w_1+w_2)^2}$, $A_1=-\frac{w_1k_2+w_2k_1}{2w_2}$,

$B_1=-\frac{w_1+w_2}{2w_2}$, $\mu=b(k_2-w_2m)+dk_1$, $\eta=d(k_1+w_1m)+bk_2$, $-a_{1n}$ $-b_1$ — корни квадратного трехчлена $p^2+(k_1+k_2+mw_1-mw_2)p+(k_1+w_1m)(k_2+w_2m)-k_1k_2$; $c_{(1)}$, $c_{(2)}$ — постоянные интегрирования, которые найдутся из граничных условий. В нашем случае получаем:

$$u_0=-k_1c_{(1)}p-k_1c_{(2)}p+a+\frac{p(bp+\mu)}{(p+a_1)(p+b_1)},$$

$$v_0=[+]\,c_{(1)}pe^{\lambda(1)l}+[-]\,c_{(2)}pe^{\lambda(2)l}+a+\frac{p(dp+\eta)}{(p+a_1)(p+b_1)}e^{ml}.$$

Определив отсюда постоянные интегрирования $c_{(1)}$, $c_{(2)}$ и подставив их в выражение (III), можем перейти от полученных изображений pU, pV к оригиналам*. В состав выражений для $c_{(1)}$, $c_{(2)}$, а следовательно, и в выражения pU, pV войдет член вида $L=\frac{1}{1-q}$, где $q=\frac{[-]}{[+]}e^{-2Cl\sqrt{(p+D)^2-\mathscr{E}}}$. Этот член будет усложнять отыскание оригинала и сделает результат более громоздким. Но можно показать, что выражение L можно разложить в равномерно сходящийся ряд $L=1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots$ С целью значительного упрощения результата можно искать лишь приближенные решения задачи, ограничиваясь любым числом членов разложения L.

* См. операционное исчисление, например [3,4].

Возьмем, например, первый член разложения. Будем искать переходный процесс на выходе, давая единичное толчкообразное возмущение только температуры и лишь по одной этой среде u. После преобразований получим:

$$pU = -\gamma e^{Cl\,[p+D-\sqrt{(p+D)^2-\mathcal{E}}]} + a + be^{ml}, \tag{1}$$

где $\gamma = e^{(A-CD)l} e^{-(C-B)lp}$. Пользуясь ([3]), переходим к оригиналу:

$$u = e^{(A-CD)l} \varphi(t) + a + be^{ml}, \tag{2}$$

где

$$\varphi(t) = 0 \text{ при } t < \frac{l}{w_1}; \qquad \varphi(t) = F\left(t - \frac{l}{w_1}\right) \text{ при } t \geqslant \frac{l}{w_1};$$

$$F(t) = 1 + \int_0^\infty \frac{e^{-D\theta} Cl\sqrt{\mathcal{E}} I_1\left[\sqrt{\mathcal{E}}\sqrt{\theta^2 + 2Cl\theta}\right]}{\sqrt{\theta^2 + 2Cl\theta}}\, d\theta;$$

I_1 — функция Бесселя мнимого аргумента. Таким образом, выражение (2) является приближенным решением задачи для случая противотока. Случай прямотока рассматривается совершенно аналогично. Также могут быть получены более точные приближения — с учетом двух и большего числа членов ряда разложения.

График функции u по соотношению (2) можно легко построить благодаря возможности быстро вычислять значение $F(t)$, пользуясь существующими таблицами для I_1. Величина интеграла от 0 до t определяется легко с помощью планиметра.

Для того чтобы аналитически нагляднее была выражена зависимость формы переходного процесса от значения параметров системы и комплексов этих параметров D, C, можно найти производную dF/dt, а функцию Бесселя по известной формуле представить в виде степенного ряда. Заметим, что $(dF/dt)_{t=0} = {}^1/_2\mathcal{E}Cl$, откуда

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t=\frac{l}{w_1}+0} = \frac{1}{2} l\mathcal{E}Ce^{(A-CD)l}.$$

Комплекс D характеризует скорость убывания подинтегральной функции, а следовательно, и функции dF/dt, начиная с некоторого момента времени и при $t \to \infty$. Пользуясь приближенным выражением для I_1 по $F(t)$ и dF/dt легко можно вести аналитические исследования поведения кривой переходного процесса.

По данным здесь уравнениям можно, следовательно, для непрерывнодействующих аппаратов (теплообменник и другие) вычислять как изменение распределения температур (или концентраций) по длине аппарата, так и изменения конечных результатов процесса — на выходе — вследствие тех или иных возмущений режима работы. Тем самым, наряду с легкостью и доступностью вычисления переходных процессов в заданных системах, открываются возможности изучения зависимости того или иного протекания переходного процесса от изменения параметров системы для широкого класса технологических аппаратов.

Приношу глубокую благодарность проф. К. Н. Шабалину за указание им темы настоящей работы и консультации при выполнении ее.

Уральский научно-исследовательский химический институт

Поступило 15 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Лыков, Теплопроводность нестационарных процессов, 1948. [2] К. Н. Шабалин, ЖПХ, 4, 484 (1931). [3] В. А. Диткин, П. И. Кузнецов, Справочн. по операционному исчислению, 1951. [4] Х. Карслоу, Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике, 1948.