

А. М. ЯГЛОМ и М. С. ПИНСКЕР \*

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ СО СТАЦИОНАРНЫМИ  
ПРИРАЩЕНИЯМИ  $n$ -ГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 21 IV 1953)

1. Пусть  $\xi(t)$  — случайный процесс и

$$\Delta_{\tau}^{(n)}\xi(t) = \xi(t) - c_n^1 \xi(t - \tau) + C_n^2 \xi(t - 2\tau) - \dots + (-1)^n \xi(t - n\tau). \quad (1)$$

Определение. Случайный процесс  $\xi(t)$  называется процессом со стационарными в узком смысле приращениями  $n$ -го порядка, если при любом целом положительном  $k$  и любых вещественных  $s, t_1, t_2, \dots, t_k, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$  совместное распределение вероятностей для случайных величин

$$\Delta_{\tau_1}^{(n)}\xi(s + t_1), \Delta_{\tau_2}^{(n)}\xi(s + t_2), \dots, \Delta_{\tau_k}^{(n)}\xi(s + t_k) \quad (2)$$

не зависит от  $s$ .

Случайный процесс  $\xi(t)$  называется процессом со стационарными в широком смысле приращениями  $n$ -го порядка, если математические ожидания

$$M\Delta_{\tau}^{(n)}\xi(s) = c^{(n)}(\tau), \quad M\Delta_{\tau_1}^{(n)}\xi(s + t) \overline{\Delta_{\tau_2}^{(n)}\xi(s)} = D^{(n)}(t; \tau_1, \tau_2) \quad (3)$$

существуют и не зависят от  $s$ .

Частными случаями процессов со стационарными приращениями  $n$ -го порядка будут обычные стационарные (в узком или, соответственно, широком смысле) случайные процессы <sup>(1, 2)</sup>, а также случайные процессы, имеющие стационарную  $n$ -ю производную, или представимые в виде суммы стационарного процесса и многочлена  $n$ -й степени со случайными коэффициентами <sup>(3, 4)</sup>. При  $n = 1$  мы получаем процессы со стационарными приращениями, изученные в <sup>(5, 2)</sup>.

В дальнейшем будут рассматриваться только процессы со стационарными в широком смысле приращениями  $n$ -го порядка, для которых  $c^{(n)}(\tau)$  и  $D^{(n)}(t; \tau_1, \tau_2)$  — непрерывные функции своих аргументов; такие процессы мы будем называть просто процессами со стационарными  $n$ -ми приращениями. Функцию  $D^{(n)}(t; \tau_1, \tau_2)$  мы будем называть структурной функцией  $n$ -го порядка процесса  $\xi(t)$ .

2. Лемма. При любом целом положительном  $k$  приращения  $n$ -го порядка  $\Delta_{k\tau}^{(n)}\xi(t)$  и  $\Delta_{\tau}^{(n)}\xi(t)$  связаны тождеством

$$\Delta_{k\tau}^{(n)}\xi(t) = A_0 \Delta_{\tau}^{(n)}\xi(t) + A_1 \Delta_{\tau}^{(n)}\xi(t - \tau) + \dots + A_{(k-1)n} \Delta_{\tau}^{(n)}\xi(t - (k-1)n\tau), \quad (4)$$

где коэффициенты  $A_0, A_1, \dots, A_{(k-1)n}$  таковы, что

$$A_0 x^{(k-1)n} + A_1 x^{(k-1)n-1} + \dots + A_{(k-1)n} \equiv \frac{(x^k - 1)^n}{(x - 1)^n} \equiv (x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + 1)^n. \quad (5)$$

\* Изложенные в настоящей заметке результаты были найдены обоими авторами независимо. Приведенные здесь доказательства принадлежат А. М. Яглому.

Доказательство этой леммы сразу следует из того, что алгоритм, приводящий к представлению  $\Delta_{k\tau}^{(n)}\xi(t)$  в виде суммы (4), полностью совпадает с алгоритмом деления многочлена  $(x^k - 1)^n$  на  $(x - 1)^n$ .

**Основная теорема.** *Функции  $c^{(n)}(\tau)$  и  $D^{(n)}(t; \tau_1, \tau_2)$  для любого случайного процесса  $\xi(t)$  со стационарными  $n$ -ми приращениями представимы в виде*

$$c^{(n)}(\tau) = c\tau^n, \quad (6)$$

$$D^{(n)}(t; \tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} (e^{-i\tau_1\lambda} - 1)^n (e^{i\tau_2\lambda} - 1)^n \frac{1 + \lambda^{2n}}{\lambda^{2n}} dF(\lambda), \quad (7)$$

где  $c$  — константа, а  $F(\lambda)$  — непрерывная слева вещественная неубывающая ограниченная функция такая, что  $F(0) = 0$ ;  $c$  и  $F(\lambda)$  однозначно определяются процессом  $\xi(t)$ .

**Доказательство.** Из (3), (4) и (5) немедленно получаем

$$c^{(n)}(k\tau) = (A_0 + A_1 + \dots + A_{(k-1)n}) c^{(n)}(\tau) = k^n c^{(n)}(\tau),$$

и, в частности,  $c^{(n)}(k) = k^n c^{(n)}(1)$ ,  $k^n c^{(n)}(1/k) = c^{(n)}(1)$ . Отсюда легко вытекает, что  $c^{(n)}(\tau) = c\tau^n$ ,  $c = c^{(n)}(1)$  при любом рациональном  $\tau$ . Далее из непрерывности  $c^{(n)}(\tau)$  заключаем, что это равенство сохранится и при любом вещественном  $\tau$ , что и доказывает (6).

Перейдем к доказательству (7). Из определения функции  $D^{(n)}(t; \tau_1, \tau_2)$  видно, что  $D^{(n)}(t; \tau, \tau)$  будет положительно определенной функцией  $t$ , так, что, в силу теоремы Бохнера,

$$D^{(n)}(t; \tau, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d_{\lambda} F(\lambda; \tau), \quad (8)$$

где  $F(\lambda; \tau)$  — вещественная ограниченная неубывающая функция от  $\lambda$ . Пусть теперь  $\tau > 0$  и  $k > 0$  целое; тогда, согласно (4), (5) и (8),

$$\begin{aligned} M\Delta_{k\tau}^{(n)}\xi(s+t) \overline{M\Delta_{k\tau}^{(n)}\xi(s)} &= \sum_{p=0}^{(k-1)n} \sum_{q=0}^{(k-1)n} A_p A_q M\Delta_{\tau}^{(n)}\xi(s+t-p\tau) \overline{M\Delta_{\tau}^{(n)}\xi(s-q\tau)} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \sum_{p=0}^{(k-1)n} A_p e^{-ip\tau\lambda} \sum_{q=0}^{(k-1)n} A_q e^{iq\tau\lambda} d_{\lambda} F(\lambda; \tau) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \frac{(e^{-ik\tau\lambda} - 1)^n (e^{ik\tau\lambda} - 1)^n}{(e^{-i\tau\lambda} - 1)^n (e^{i\tau\lambda} - 1)^n} d_{\lambda} F(\lambda; \tau), \end{aligned}$$

т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d_{\lambda} F(\lambda; k\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \frac{(1 - \cos k\tau\lambda)^n}{(1 - \cos \tau\lambda)^n} d_{\lambda} F(\lambda; \tau). \quad (9)$$

Отсюда следует, что  $F(\lambda; k\tau) = \int_0^{\lambda} \frac{(1 - \cos k\tau u)^n}{(1 - \cos \tau u)^n} d_u F(u; \tau)$  и, значит,

$$\int_0^{\lambda} \frac{u^{2n}}{(1 - \cos k\tau u)^n} \frac{1}{1 + u^{2n}} d_u F(u; k\tau) = \int_0^{\lambda} \frac{u^{2n}}{(1 - \cos \tau u)^n} \frac{1}{1 + u^{2n}} d_u F(u; \tau), \quad (10)$$

где оба интеграла определены, во всяком случае, при  $|\lambda| < 2\pi/\tau$ .

Положим  $h_k = 2^{-k}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , и рассмотрим функцию

$$F(\lambda) = \frac{1}{2^n} \int_0^\lambda \frac{u^{2n}}{(1 - \cos h_k u)^n} \frac{1}{1 + u^{2n}} d_u F(u; h_k). \quad (11)$$

$F(\lambda)$  — вещественная неубывающая функция; в силу (10) она не зависит от  $k$  и, так как  $h_k$  может быть выбрано сколь угодно малым, то она определена для всех вещественных  $\lambda$ . Ясно, что  $F(\lambda)$  можно считать непрерывной слева. Для доказательства ограниченности этой функции заметим, что из (8) и (11) легко выводится равенство

$$\int_0^1 D^{(n)}(0; \tau, \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda) dF(\lambda), \quad \Phi(\lambda) = 2^n \frac{1 + \lambda^{2n}}{\lambda^{2n}} \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} \sin^{2n} \alpha d\alpha.$$

$\Phi(\lambda)$  есть непрерывная на всей прямой  $-\infty < \lambda < \infty$  всюду положительная функция, стремящаяся при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  к положительному пределу. Отсюда вытекает, что  $\Phi(\lambda) \geq b > 0$ ; но так как  $D^{(n)}(0; \tau, \tau)$  есть непрерывная функция  $\tau$ , то

$$\int_{-\infty}^{\infty} dF(\lambda) \leq \frac{1}{b} \int_0^1 D^{(n)}(0; \tau, \tau) d\tau < \infty. \quad (12)$$

Пусть теперь  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — двоично рациональные; тогда существует  $h$  вида  $2^{-k}$  такое, что  $\tau_1 = k_1 h$ ,  $\tau_2 = k_2 h$ . Аналогично выводу (9) получаем

$$\begin{aligned} D^{(n)}(t; \tau_1, \tau_2) &= \mathbf{M} \Delta_{k_1 h}^{(n)} \xi(s+t) \overline{\Delta_{k_2 h}^{(n)} \xi(s)} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \frac{(e^{-ik_1 h \lambda} - 1)^n}{(e^{-ih\lambda} - 1)^n} \frac{(e^{ik_2 h \lambda} - 1)^n}{(e^{ih\lambda} - 1)^n} d_\lambda F(\lambda; h) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} (e^{-i\tau_1 \lambda} - 1)^n (e^{i\tau_2 \lambda} - 1)^n \frac{1 + \lambda^{2n}}{\lambda^{2n}} dF(\lambda). \end{aligned}$$

Из непрерывности  $D^{(n)}(t; \tau_1, \tau_2)$  относительно  $\tau_1$  и  $\tau_2$  заключаем, что последняя формула должна сохраняться при любых вещественных  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Формула (7) доказана.

Остается показать, что функция  $F(\lambda)$  для данного  $\xi(t)$  определяется однозначно. Но если (7) имеет место, то будет выполняться (11), где  $F(\lambda; h)$  есть функция, фигурирующая в (8), которая однозначно определяется по  $D^{(n)}(t; h, h)$ . Тогда (11) однозначно определяет значения  $F(\lambda)$  в ее точках непрерывности; значения в точках разрыва однозначно определяются условием непрерывности слева, ч. и т. д.

Замечание. Формула (7) очень удобна для доказательства, но мало наглядна. При истолковании полученных результатов удобнее исходить не из (7), а из одного из двух эквивалентных этой формуле, но более наглядных представлений функции  $D^{(n)}(t; \tau_1, \tau_2)$ , аналогичных представлениям (3.45) и (3.54) работы (2) для функции  $D^{(1)}(t; \tau_1, \tau_2)$  при  $t = 0$  (ср. также (5)).

3. Из (7) в силу теоремы Карунена о спектральном разложении ((6), теорема 10) немедленно следует формула

$$\Delta_{\tau}^{(n)} \xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} (e^{-i\tau\lambda} - 1)^n \frac{1 + i\lambda^n}{i\lambda^n} dZ(\lambda), \quad (13)$$

где  $Z(\lambda)$  есть случайная функция с некоррелированными приращениями, такая, что для любого измеримого по  $dF$  множества  $S$

$$\mathbf{M} \left| \int_S dZ(\lambda) \right|^2 = \int_S dF(\lambda) = F(S). \quad (14)$$

Из (6) и (13) легко следует, что  $M[Z(+0) - Z(-0)] = i^{n+1}c$ ; учитывая это обстоятельство, (13) можно переписать в виде

$$\Delta_{\tau}^{(n)}\xi(t) = c\tau^n + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} (e^{-i\lambda\tau} - 1)^n \frac{1 + i\lambda^n}{i\lambda^n} dZ'(\lambda), \quad (13')$$

где  $Z'(\lambda)$  — новая случайная функция с некоррелированными приращениями, для которой  $MZ'(\lambda) \equiv 0$ .

Из (13) (или (13')) легко получить также спектральное представление самого случайного процесса  $\xi(t)$ . Так как общим решением однородного разностного уравнения  $\Delta_{\tau}^{(n)}\xi(t) = 0$ , где  $\tau$  — любое, будет произвольный многочлен  $(n-1)$ -го порядка, то  $\xi(t)$  представимо в виде суммы такого многочлена и какого-то частного решения неоднородного уравнения (13), например, решения вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{i\lambda t} - \frac{1 + i\lambda t + \dots + \frac{(i\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}}{1 + i\lambda^n} \right] \frac{1 + i\lambda^n}{i\lambda^n} dZ(\lambda).$$

Тогда для  $\xi(t)$  получим формулу

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{i\lambda t} - \frac{1 + i\lambda t + \dots + \frac{(i\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}}{1 + i\lambda^n} \right] \frac{1 + i\lambda^n}{i\lambda^n} dZ(\lambda) + \xi_0 + \xi_1 t + \dots + \xi_{n-1} t^{n-1}, \quad (15)$$

где  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  — постоянные (не зависят от  $t$ ). Целый ряд других формул того же типа можно получить, выбрав иначе частное решение уравнения (13).

Замечание 1. Ясно, что формулу (13) можно записать также в виде, аналогичном формулам (3.43) и (3.53) работы (2).

Замечание 2. Если рассматривать  $\xi(t)$  как случайный процесс в обычном смысле (т. е. предполагать существование распределений вероятностей для величин  $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_k)$  при всевозможных  $k, t_1, t_2, \dots, t_k$ ), то коэффициенты  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  в формуле (15) мы должны будем считать случайными величинами. Однако для того, чтобы можно было говорить о  $\xi(t)$  как о процессе со стационарными  $n$ -ми приращениями, вполне достаточно, чтобы распределения вероятностей существовали только для приращений  $n$ -го порядка (2), но не для самих величин  $\xi(t)$ . В связи с этим коэффициенты  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  вовсе не необходимо считать случайными величинами, т. е. предполагать, что они имеют распределение вероятностей; вполне можно считать, что это просто какие-то неизвестные нам числа.

Замечание 3. С помощью формулы (15) легко доказать следующее существенное дополнение основной теоремы настоящей заметки: любая функция  $D^{(n)}(t; \tau_1, \tau_2)$ , представимая в виде (7), является структурной функцией  $n$ -го порядка некоторого случайного процесса  $\xi(t)$  со стационарными  $n$ -ми приращениями. В самом деле, такой процесс  $\xi(t)$  можно задать, например, формулой (15), где  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  — произвольные, а  $Z(\lambda)$  — случайная функция с некоррелированными приращениями, удовлетворяющая (14).

Поступило  
12 III 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> А. Я. Хинчин, Math. Ann., 109, 604 (1934); Усп. матем. наук, в. 5, 42 (1938).  
<sup>2</sup> А. М. Яглом, Усп. матем. наук, 7, в. 5 (51), 3 (1952). <sup>3</sup> L. A. Zadeh, R. R. gazzini, J. Appl. Phys., 21, № 7, 645 (1950). <sup>4</sup> В. В. Солодовников, Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, гл. VIII, М.—Л., 1952. <sup>5</sup> А. Н. Колмогоров, ДАН, 26, 6 (1940); 26, 115 (1940). <sup>6</sup> K. Karhunen, Ann. Acad. Sci. Fennicae, A, I, № 37 (1947).