

М. Н. МАРУШИН

**О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПРИМЕНИМОСТИ  
ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ПОРЯДКА  $p < 2$**

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 9 IV 1953)

Целью настоящей заметки является доказательство следующей теоремы С. Н. Бернштейна, приведенной без доказательства в одной из его статей (1).

**Теорема.** *Рассмотрим сумму случайных независимых величин  $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$ , м. о.  $x_i = 0$ . Пусть  $\tau = L_n / \sqrt{B'_n} > 0$  — произвольно малое число, где  $B'_n$  — укороченная дисперсия  $S_n$ , соответствующая  $|x_k| \leq L_n$ ; пусть  $C_{k,p}^* = \text{м. о. } |x_k|^p$  содержит лишь значения  $|x_k| > L_n$ .*

*В таком случае для применимости предельной теоремы данного порядка  $p$  необходимо и достаточно, чтобы*

$$M_{n,p}^* = \frac{\sum_{k=1}^n C_{k,p}^*}{(B'_n)^{p/2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (*)$$

(Условие необходимости предполагает величины  $x_i$  равномерно пренебрегаемыми и имеющими 0 общей медианой).

**Примечание.** Предельной теоремой порядка  $p < 2$  (согласно терминологии С. Н. Бернштейна (1)) называют одновременное соблюдение двух следующих предельных соотношений:

$$\text{вер.} \left( \frac{S_n}{\sqrt{B'_n}} < t \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-z^2/2} dz; \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{м. о.} \left| \frac{S_n}{\sqrt{B'_n}} \right|^p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^p e^{-t^2/2} dt = R_p. \quad (2)$$

Теорема о применимости предельной теоремы порядка  $p > 2$  к сумме  $S_n$  независимых случайных величин была доказана С. Н. Бернштейном в статье (1). Прежде чем доказывать теорему при  $p < 2$ , сформулируем две вспомогательные леммы, доказательство которых не представляет труда.

**Лемма 1.** *Если интегральная функция вероятностей  $F_n(x)$  величины  $u_n$  стремится равномерно к  $F(x)$ , т. е.  $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon_n$  ( $-\infty < x < \infty$ ), причем м. о.  $|u_n|^p < C$  ограничено для некоторого*

$p > 0$  и  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p dF(x)$  существует, то при всяком положительном  $q < p$

$$\left| \text{м. о. } |y_n|^q - \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^q dF(x) \right| < \Psi_q(\varepsilon_n),$$

где  $\Psi_q(\varepsilon_n)$  стремится к 0 вместе с  $\varepsilon_n$  (равномерно при  $q \leq p' < p$ ).

Лемма 2. Из условия  $M_{n,p}^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  вытекает справедливость условия  $M_{n,q}^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , где  $q < p$ .

Достаточность. I. При  $L_n = \tau \sqrt{B_n}$

$$\sum_{k=1}^n \int_{|x| > L_n} dF_k(x) \leq \frac{1}{\tau^p} M_{n,p}^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда из известной предельной теоремы Бернштейна (2) следует (1).

II. 1) Введем вспомогательные случайные величины  $x'_i$ , определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i, & \text{если } |x_i| \leq L_n; \\ x'_i &= 0, & \text{если } |x_i| > L_n, \end{aligned}$$

и пусть

$$S'_n = \sum_{i=1}^n x'_i.$$

Очевидно, что условие Ляпунова порядка большего чем 2 для этих урезанных случайных величин  $x'_i$  выполняется, а потому, по теореме С. Н. Бернштейна (1),  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{м. о. } \left| \frac{S'_n}{\sqrt{B'_n}} \right|^{2+\delta} = R_{2+\delta}$  ( $\delta > 0$ ). Отсюда из

леммы 1 следует (2) для суммы  $S'_n$ .

При любом  $p > 0$  можно показать, что

$$\text{м. о. } \left| \frac{S'_n}{\sqrt{B'_n}} \right|^p - \text{м. о. } \left| \frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \right|^p \leq (R_p + \varepsilon'_n) \sum_{k=1}^n \int_{|x| > L_n} dF_k(x),$$

$$\{ |x_1| \leq L_n, \dots, |x_n| \leq L_n \}$$

где м. о.  $\left| \frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \right|^p$  содержит лишь те значения  $x_1, \dots, x_n$ , которые

удовлетворяют неравенствам  $\{ |x_1| \leq L_n, \dots, |x_n| \leq L_n \}$ , и  $\varepsilon'_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{м. о. } \left| \frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \right|^p = R_p. \quad (2^*)$$

$$\{ |x_1| \leq L_n, \dots, |x_n| \leq L_n \}$$

2) Разобьем м. о.  $\left| \frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \right|^p$  на две части: на м. о.  $\left| \frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \right|^p$  и на

$$\text{м. о. } * \left| \frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \right|^p = \text{м. о. } \left| \frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \right|^p - \text{м. о. } \left| \frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \right|^p$$

$$\{ |x_1| \leq L_n, \dots, |x_n| \leq L_n \}$$

Для доказательства предельного соотношения (2) достаточно показать, что

$$\text{м. о.}^* \left| \frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \right|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3)$$

Для этого введем вторую пару вспомогательных случайных величин  $x_i''$ , определенных следующим образом:

$$x_i'' = 0, \quad \text{если } |x_i| \leq L_n;$$

$$x_i'' = x_i, \quad \text{если } |x_i| > L_n$$

и пусть

$$S_n'' = \sum_{i=1}^n x_i''$$

Тогда

$$\text{м. о.}^* \left| \frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \right|^p \leq 2^p \text{ м. о.} \left| \frac{S_n''}{\sqrt{B_n}} \right|^p + 2^p \left[ \text{м. о.} \left| \frac{S_n'}{\sqrt{B_n}} \right|^p - \text{м. о.} \left| \frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \right|^p \right]_{\{|x_1| \leq L_n, \dots, |x_n| \leq L_n\}} \quad (4)$$

Но так как

$$\text{м. о.} \left| \frac{S_n''}{\sqrt{B_n}} \right|^p \leq M_{np}^* + 2(M_{n, p/2}^*)^2$$

и выражение в квадратной скобке неравенства (4) стремится к нулю, то справедливо предельное соотношение (3).

Необходимость. По теореме Феллера (см. (3,4)) существует такое  $L_n = \tau \sqrt{B_n}$ , для которого  $\sum_{k=1}^n \int_{|x| > L_n} dF_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Остается показать, что  $M_{n, p}^* \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Для этого, как и при доказательстве достаточности,

разобьем м. о.  $\left| \frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \right|^p$  на две части: на м. о.  $\left| \frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \right|^p_{\{|x_1| \leq L_n, \dots, |x_n| \leq L_n\}}$  и на

$$\text{м. о.}^* \left| \frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \right|^p_{\{|x_1| > L_n, \dots, |x_n| > L_n\}}. \quad \text{При этом м. о.}^* \left| \frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \right|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{так как справедливо (2)}$$

для суммы  $S_n$  по условию теоремы, а (2\*) справедливо по выполнению условия Ляпунова для усеченных случайных величин  $x_i'$ .

Покажем, что при достаточно большом  $n$

$$\text{м. о.}^* \left| \frac{S_n}{\sqrt{B_n}} \right|^p \geq \frac{\left(1 - \sum_{k=1}^n \int_{|x| > L_n} dF_k(x)\right)}{2} M_{n, p}^*. \quad (5)$$

В самом деле, благодаря лемме 2 статьи (1) необходимость достаточно показать лишь для симметричных случайных величин  $x_i$ . Используя симметрию, можно написать, что

$$\text{м. о.} |S_n|^p \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{м. о.} |x_i|^p \cdot \prod_{k=1}^n \int_{|x| > L_n} dF_k(x).$$

$\{|x_i| > L_n, |x_1| \leq L_n, \dots, |x_{i+1}| \leq L_n, |x_{i+1}| \leq L_n, \dots, |x_n| \leq L_n\}$

Из неравенства

$$(3) \quad \prod_{k=1}^n \int_{|x| > L_n} dF_k(x) \geq 1 - \sum_{k=1}^n \int_{|x| > L_n} dF_k(x),$$

справедливого при  $n$  достаточно большом, вытекает неравенство (5), что, очевидно, доказывает необходимость условия (\*) нашей теоремы.

Поступило  
10 III 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> С. Н. Бернштейн, ДАН, 24, № 1, 3 (1939). <sup>2</sup> С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, 1946. <sup>3</sup> С. Н. Бернштейн, Изв. НИИ матем. и мех. Томск. ун-та, 3:1 (1946). <sup>4</sup> W. Feller, Math. Z., 40, 521 (1935).