Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 5

МАТЕМАТИКА

В. К. ДЕТЛОВС

НОРМАЛЬНЫЕ АЛГОРИФМЫ И РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 8 IV 1953)

1. Под числом будем понимать натуральное число (включая нуль); под функцией — арифметическую функцию, т. е. функцию, аргументы и значения которой — натуральные числа.

Систематические исследования в области рекурсивной арифметики начинаются с работы Сколема (11). В тридцатых годах Гёделем было введено понятие примитивной рекурсивной функции (2), Эрбраном и Гёделем — понятие общей рекурсивной функции (см. (4,6)).

В тридцатых же годах Черч и Клин разработали теорию λ-определимых функций (1,3) и Тюринг ввел понятие о вычислимой функции, значения которой печатает на бумажной ленте некоторая автоматическая машина (12).

Доказано, что каждая λ-определимая функция есть общая рекурсивная функция, и наоборот (5). Доказано также, что каждая вычислимая по Тюрингу функция есть общая рекурсивная функция, и наоборот (13).

Это подкрепляет тезис, высказанный Черчем (1) и утверждающий, что каждая эффективно вычислимая функция вообще, т. е. каждая функция, для нахождения значения которой имеется алгорифм, есть общая рекурсивная функция.

Упомянутые работы (1,6,12) дают, таким образом, и некоторое косвенное уточнение расплывчатого понятия алгорифма.

Непосредственным уточнением этого понятия занимался А. А. Марков. Он ввел понятие нормального алгорифма и разработал теорию нормальных алгорифмов (8,9); терминология этих работ применяется в настоящей заметке.

В рамках теории нормальных алгорифмов может быть определено понятие алгорифмической (в строгом смысле слова) функции.

Удобно предположить, что числа всегда записаны как слова в алфавите $Ч = \{|\}$, т. е. число n как слово „$|\ldots|$“ (n черточек). Системы чисел будем записывать как слова в алфавите $C = \{|, *\}$, например, систему $x_1, \ldots, x_n$ как слово $x_1 * \ldots * x_n$.

Определение 1. Функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ называется алгорифмической, если существует нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$ над алфавитом C такой, что

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mathfrak{A}(x_1 * \ldots * x_n). \tag{1}$$

Знак „$\simeq$“ означает, что если осмыслена левая часть, то осмыслена также правая, причем они равны, и наоборот.

Определение 2. Функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ называется вполне алгорифмической, если существует нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$ над алфавитом C, применимый ко всем словам вида $x_1 * \ldots * x_n$ и такой, что имеет место (1).

Естественно возникает вопрос о взаимоотношениях понятий алгорифмической и общей рекурсивной функций. Этому вопросу и посвящена настоящая заметка.

2. Теорема 1. *Каждая примитивная рекурсивная функция n аргументов вполне алгорифмична.*

Теорема 2. *Если функция $\psi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ вполне алгорифмична, то функция*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu_y(\psi(y, x_1, \ldots, x_n) = 0)$$

алгорифмична.

Здесь $\mu_y(\ )$ означает наименьшее из чисел y, удовлетворяющих условию в скобках; $\mu_y(\ )$ не осмыслено, если такого числа y нет.

Из теоремы 2 следует:

Теорема 3. *Если функция $\psi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ вполне алгорифмична и для всех $x_1, \ldots, x_n$ существует y такое, что*

$$\psi(y, x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

то функция

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \mu_y(\psi(y, x_1, \ldots, x_n) = 0)$$

тоже вполне алгорифмична.

С помощью теоремы Клина ([6]) о нормальной форме общей рекурсивной и частичной рекурсивной функции ([6]), а также теорем 1, 2 и 3 могут быть доказаны теоремы 4 и 5.

Теорема 4. *Каждая частичная рекурсивная функция n аргументов алгорифмична.*

Теорема 5. *Каждая общая рекурсивная функция n аргументов вполне алгорифмична.*

3. Рассмотрим алгорифмические функции одного аргумента. Каждой такой функции $\varphi(x)$ соответствует нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$ над алфавитом $Ч$ такой, что

$$\varphi(x) \simeq \mathfrak{A}(x). \tag{2}$$

Так как вместе с $\mathfrak{A}$ условному равенству (2) удовлетворяет и каждый нормальный алгорифм, эквивалентный $\mathfrak{A}$ относительно $Ч$, то можно предположить, что $\mathfrak{A}$ есть алгорифм в двубуквенном алфавите $A = \{\,|\,, \alpha\}$; сделать это позволяет доказанная Н. М. Нагорным усиленная теорема приведения ([10]).

Для доказательства рекурсивности алгорифмической функции $\varphi(x)$ мы должны располагать некоторой арифметизацией слов в A.

Обозначим через $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$ матрицы

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Определение 3. а) Пусть дано слово P в A:

$$P = \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k \quad (k > 0),$$

где ξ_i равно $|$ или α $(1 \leqslant i \leqslant k)$; тогда матрица $\mathcal{P}$ называется γ-соответствующей слову P, если

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \times \ldots \times \mathcal{P}_k,$$

где

$$\mathcal{P}_i = \begin{cases} \mathcal{A}, \text{ если } \xi_i = \,| \,; \\ \mathcal{B}, \text{ если } \xi_i = \alpha \end{cases} \quad (1 \leqslant i \leqslant k)$$

и косой крест означает обычное матричное умножение;

б) матрица $\mathscr{E}$ называется γ-соответствующей пустому слову Λ.

Каждое слово P в A имеет точно одну γ-соответствующую матрицу $\mathscr{P}$, причем слово P может быть однозначно восстановлено по матрице $\mathscr{P}$ (идея такой арифметизации принадлежит А. А. Маркову ([7])).

При помощи такой арифметизации может быть доказана

Теорема 6а. *Каждая алгорифмическая функция одного аргумента есть частичная рекурсивная функция.*

Лемма. *Для каждого $n > 1$ существует нормальный алгорифм $\mathfrak{P}^{(n)}$, применимый ко всем словам вида $x_1 * \ldots * x_n$ и перерабатывающий такое слово в число, являющееся номером системы чисел $x_1, \ldots, x_n$ в некоторой взаимно-однозначной нумерации всех систем чисел $x_1, \ldots, x_n$ с данным n.*

Лемма позволяет распространить теорему 6а на общий случай:

Теорема 6. *Каждая алгорифмическая функция n аргументов есть частичная рекурсивная функция.*

Из теоремы 6 следует:

Теорема 7. *Каждая вполне алгорифмическая функция n аргументов есть общая рекурсивная функция.*

4. Теоремы 4 и 6 показывают, что объемы понятий алгорифмической и частичной рекурсивной функции совпадают. Так же совпадают, согласно теоремам 5 и 7, объемы понятий вполне алгорифмической и общей рекурсивной функций.

Глубоко благодарен моему руководителю проф. А. А. Маркову, который посоветовал заниматься данным вопросом и содействовал выполнению работы.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
14 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Church, Am. J. Math., **58**, 345 (1936). [2] K. Gödel, Monatsh. f. Math. Phys., **38**, 173 (1931). [3] S. C. Kleene, Am. J. Math., **57**, 153, 219 (1935). [4] S. C. Kleene, Math. Ann., **112**, 727 (1936). [5] S. C. Kleene, Duke Math. J., **2**, 340 (1936). [6] S. C. Kleene, Trans. Am. Math. Soc., **53**, 41 (1943). [7] А. А. Марков, ДАН, **57**, 539 (1947). [8] А. А. Марков, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 38, 176 (1951). [9] А. А. Марков, Матем. сборн., **31**, 34 (1952). [10] Н. М. Нагорный, ДАН, **90**, № 3 (1953). [11] Th. Skolem, Vid. Skr., I Mat.-Natw. Kl., No. 6 (1923). [12] A. M. Turing, Proc. Lond. Math. Soc., **42**, 230 (1937). [13] A. M. Turing, J. Symb. Logic, **2**, 153 (1937).