Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 5

МАТЕМАТИКА

Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦИКЛОВ ЧЕРНА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ*

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 III 1953)

В заметке вычисляются Δ-циклы Черна алгебраического многообразия M^k, лежащего в комплексном проективном пространстве P^n (см. формулу (3)).

1. Многообразия $P^n_{k,l}$. Наряду с P^n рассмотрим многообразия $P^n_{k,l}$ всевозможных пар (z, P^k), где подпространство $P^k \subset P^n$ содержит точку z, а сама точка z пробегает некоторое фиксированное подпространство $P^l \subset P^n$. При $k=0$, $l=n$ получается проективное пространство $P^n = P^n_{0,n}$; при $l=0$ получается многообразие $H(k, n-k) = P^n_{k,0}$ всевозможных k-мерных подпространств $P^k \subset P^n$, содержащих некоторую фиксированную точку $O \subset P^n$.

Гомологии в $H(k, n-k)$ описываются целочисленной неубывающей функцией ω целочисленного аргумента i: $0 \leqslant \omega(i) \leqslant n-k$; $i=1,\ldots,k$. Именно, пусть $P_i \subset P^n$ — подпространства размерностей $i+\omega(i)$, удовлетворяющие условию $O \subset P_1 \subset \ldots \subset P_k$; через $Z(\omega)$ обозначим множество всех $P^k \in H(k, n-k)$, удовлетворяющих условиям $\dim(P^k \cap P_i) \geqslant i$, $i=1,\ldots,k$. Замкнутые псевдомногообразия $Z(\omega)$ являются циклами действительной размерности $2s = 2\sum_{i=1}^{k}\omega(i)$. Выбирая для каждой такой функции ω соответствующий ему цикл $Z(\omega)$, мы получим независимый базис гомологий многообразия $H(k, n-k)$ (кручения отсутствуют) [1].

2. База $2s$-мерных гомологий многообразия $P^n_{k,n}$. Для дальнейшего необходимо знание баз $2s$-мерных гомологий многообразия $P^n_{k,n}$ для $s=0,1,\ldots,k$. Они вычисляются методом Л. С. Понтрягина [2]. Пусть $Z^t(\omega)$ — базисный цикл размерности $2t$ многообразия $H(k, n-k)$. Тогда все подпространства $P^k \in Z^t(\omega)$ содержат некоторое фиксированное подпространство $P^{s-t} \subset P^n$. Поэтому множество пар (z, P^k), $z \in P^{s-t}$, $P^k \in Z^t(\omega)$, есть $2s$-мерный цикл $(P^{s-t}, Z^t(\omega))$ многообразия $P^n_{k,n}$. Совокупность циклов $(P^{s-t}, Z^t(\omega))$, выбранных для всевозможных циклов $Z^t(\omega)$, $0 \leqslant t \leqslant s$, занумеруем в последовательность $\{X^s_i\}$, $i=1,\ldots,\alpha_s$. Оказывается, что *многообразие $P^n_{k,n}$ не имеет кручений, и все его числа Бетти нечетной размерности равны ну-*

* В заметке излагается результат моей диссертационной работы, выполненной под руководством Л. С. Понтрягина.

лю; циклы X_i^s, $s \leqslant k$, $i = 1, \ldots, \alpha_s$, образуют базу $2s$-мерных гомологий.

3. Построение основных косых произведений. Каждой точке $z \in P^n$ мы поставим в соответствие аффинную часть E_z^n проективного пространства P^n, исходя из фиксированной системы однородных координат в P^n: если $z = (z^0, \ldots, z^n)$, то $z' = (z^{0\prime}, \ldots z^{n\prime}) \in E_z^n$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i=0}^{n} \overline{z^i} z^{i\prime} \neq 0$. Пользуясь этим, мы можем построить косое произведение $T(E^k, P_{k,n}^n)$ комплексного k-мерного аффинного пространства E^k на базисное многообразие $P_{k,n}^n$. Именно, точке $(z, P^k) \in P_{k,n}^n$ мы отнесем слой $E_{(z,\,P^k)}^k = P^k \cap E_z^n$. Частями этого произведения являются косые произведения $T(E^k, X_i^s)$.

Вложение $M^k \subset P^n$ определяет многообразие $N^k \subset P_{k,n}^n$ пар (z, P^k), где $z \in M^k$, а P^k касается M^k в точке z, и дает часть $T(E^k, N^k)$ косого произведения $T(E^k, P_{k,n}^n)$. Согласно известной теореме [3], существует такое непрерывное отображение φ базы $P_{k,n}^n$ косого произведения $T(E^k, P_{k,n}^n)$ в $H(k, m)$ (m достаточно велико), что $T(E^k, P_{k,n}^n)$ эквивалентно косому произведению, индуцированному отображением φ. Одновременно с $P_{k,n}^n$ в $H(k, m)$ отображается и N^k, а следовательно, и M^k. Оказывается, что возникающее таким образом отображение f: $M^k \to H(k, m)$ есть тангенциальное отображение многообразия M^k в $H(k, m)$. Поэтому характеристические циклы многообразия M^k и косого произведения $T(E^k, N^k)$ можно считать тождественными. Отображение φ будем считать гомеоморфизмом, что всегда возможно при достаточно большом m.

4. Комплексные характеристические циклы косого произведения $T(E^k, P_{k,n}^n)$. Пусть $2r$ — размерность многообразия $P_{k,n}^n$. Через $\{Y_i^{r-s}\}$, $i = 1, \ldots, \alpha_s$, обозначим базис Δ-циклов, дуальный к базису $\{X_i^s\}$. Пусть, далее, Z — некоторый цикл размерности $2(km - s)$ многообразия $H(k, m)$. Характеристический цикл Ω^{r-s} косого произведения $T(E^k, P_{k,n}^n)$, соответствующий циклу Z, задается формулой

$$\Omega^{r-s} = \varphi^{-1}(Z \times \varphi(P_{k,n}^n)) = \sum_{j=1}^{\alpha_s} \sigma_j Y_j^{r-s}, \qquad (1)$$

где σ_j — целые числа. Тот же цикл Z порождает в произведении $T(E^k, X_i^s)$ нульмерный характеристический цикл Ω^0, индекс которого равен σ_i.

Решив соответствующую векторную задачу Понтрягина [4] для косого произведения $T(E^k, X_i^s)$, мы получили бы индекс ∇-цикла, дуального к Ω^0, т. е. σ_i. В следующем параграфе решается более частная задача Штифеля и тем самым вычисляются Δ-циклы Черна размерностей $2(r - s)$ косого произведения $T(E^k, P_{k,n}^n)$ при $s = 0, 1, \ldots, k$.

5. Вычисление индексов σ_i. В рассматриваемом случае векторная задача Штифеля ставится следующим образом:

Задать в косом произведении $T(E^k, X_i^s)$ поле $(k - s + 1)$-реперов с изолированными особенностями и вычислить сумму σ_i индексов особенностей этого поля.

Если функция ω, входящая в определение цикла $X_i^s = (P^{s-t}, Z^t(\omega))$, имеет первый скачок на j-м месте, где $j > k - t$, т. е. если неравенство $\omega(i) \neq \omega(i+1)$ наступает впервые при $i = j$ (при $j < k - t$ имеем $\omega = 0$, так как $\dim Z^t(\omega) = 2t$), то в косом произведении $T(E^k, X_i^s)$

можно построить $(k-s+1)$-реперное поле без особенностей и, следовательно, $\sigma_i = 0$.

Рассмотрим те из циклов $X_i^s = (P^{s-t}, Z^t(\omega))$, функция ω которых делает первый скачок на $(k-t)$-м месте. Таких циклов имеется $s+1$: каждому t, $0 \leqslant t \leqslant s$, соответствует один цикл X_i^s, функция ω_t которого имеет вид

$$\omega_t(1) = \ldots = \omega_t(k-t) = 0, \quad \omega_t(k-t+1) = \ldots = \omega_t(k) = 1.$$

Этот цикл в дальнейшем обозначается через U_t^s, $t = 0, 1, \ldots, s$. Соответствующий циклу U_t^s индекс σ_i будем обозначать через ρ_t^s. Пусть $P^{s-t} \subset P^{k+1} \subset P^n$, причем P^{s-t} задается в P^n уравнениями $z^{s-t+1} = \ldots \ldots = z^n = 0$, а P^{k+1} задается уравнениями $z^{k+2} = \ldots = z^n = 0$. Тогда каждое подпространство $P^k \in Z^t(\omega_t)$ задается в подпространстве P^{k+1} уравнением $\sum_{i=1}^{t+1} \zeta^i z^{k-t+i} = 0$, где $z^0, \ldots, z^{k+1}$ — координаты переменной точки в P^{k+1}, а числа $\zeta^1, \ldots, \zeta^{t+1}$ определяют подпространство $P^k \in Z^t(\omega_t)$ и подчинены единственному условию $\sum_{i=1}^{t+1} \zeta^i \overline{\zeta^i} = 1$. Следовательно, цикл U_t^s есть прямое произведение двух проективных пространств P^{s-t} и $Z^t(\omega_t)$ размерностей $s-t$ и t; он состоит из точек $(z, \zeta) = (z^0, \ldots, z^{s-t}; \zeta^1, \ldots, \zeta^{t+1})$, $z \in P^{s-t}$, $\zeta \in Z^t(\omega_t)$. В каждом слое $E^k_{(z,\zeta)}$ произведения $T(E^k, U_t^s)$ зададим последовательность из $(k-s+2)$ точек: $z_1 = z, z_2, \ldots \ldots, z_{k-s+2}$, непрерывно зависящих от точки (z, ζ). Выбор этой последовательности произведем так, чтобы точки становились зависимыми лишь в конечном числе слоев косого произведения. Тем самым в $T(E^k, U_t^s)$ определится $(k-s+1)$-реперное поле с изолированными особенностями. В слое $E^k_{(z,\zeta)}$ искомые $(k-s+2)$ точек зададим матрицей

$$\begin{array}{c} \\ \\ k-s \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \end{array}
\left\| \begin{array}{cccc|cccc|cccc}
z^0 & z^1 & & z^{s-t} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & & 0 \\
a_0 z^0 & a_1 z^1 & \ldots & a_{s-t} z^{s-t} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \Xi(\zeta^1\overline{\zeta^1} - 1) & \Xi\zeta^1\overline{\zeta^2} & \ldots & \Xi\zeta^1\overline{\zeta^{t+1}} \\
\hline
b_0 z^0 & b_1 z^1 & \ldots & b_{s-t} z^{s-t} & \Xi_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
l_0 z^0 & l_1 z^1 & \ldots & l_{s-t} z^{s-t} & 0 & 0 & \ldots & \Xi_{k-s} & 0 & 0 & & 0
\end{array} \right\|.$$

В этой матрице вдоль i-й строчки стоят координаты точки z_i в подпространстве P^{k+1}. Коэффициенты $a_0, \ldots, l_{s-t}$ положительны и алгебраически независимы между собой. Далее, $\Xi, \Xi_1, \ldots, \Xi_{k-s}$ являются линейными формами переменных $z^0, z^1, \ldots, z^{s-t}$, причем коэффициенты этих форм также алгебраически независимы между собой.

Оказывается, что для реперного поля, заданного этой матрицей, индекс ρ_t^s определяется формулой

$$\rho_t^s = (-1)^t \binom{k-t+1}{k-s+1}, \quad t = 0, 1, \ldots, s, \tag{2}$$

где $\left(\frac{a}{b}\right)$ — биномиальные коэффициенты.

6. Циклы Черна косого произведения $T(E^k, N^k)$. Через V_t^{r-s}, $t = 0, 1, \ldots, s$, обозначим те из циклов Y_i^{r-s}, которые соответствуют циклам U_t^s базиса $\{X_i^s\}$. Цикл V_t^{r-s} задается следующим образом. Рассмотрим подпространства $P^{n-k-2+t} \subset P^{n-s+t} \subset P^n$. Тогда V_t^{r-s}

состоит из всевозможных пар (z, P^h), где $z \in P^{n-s+t}$ и $\dim (P^k \cap P^{n-k-2+t} \geqslant t-1$.

Формула (1) принимает теперь вид

$$\Omega^{r-s} = \varphi^{-1}(Z \times \varphi(P^n_{k,n})) = \sum_{t=0}^{s} \rho_t^s V_t^{r-s},$$

если под Z подразумевать не произвольный $2(km-s)$-мерный цикл из $H(k, m)$, а цикл, порождающий $2(r-s)$-мерный цикл Черна Ω^{k-s} косого произведения $T(E^k, P^n_{k,n})$. Следовательно, $2(k-s)$-мерный цикл Черна Ω^{k-s} косого произведения $T(E^k, N^k)$ определяется формулой

$$\Omega^{k-s} = \sum_{t=0}^{s} \rho_t^s (V_t^{r-s} \times N^k),$$

где индексы ρ_t^s даны формулой (2).

7. Циклы Черна многообразия M^k.

Теорема. *Пусть M^k — комплексное алгебраическое многообразие комплексного проективного пространства P^n, а $P^{n-k-2+t} = Q$ и $P^{n-s+t} \supset Q$ — два фиксированных подпространства пространства P^n. Пересечение $M^k \cap P^{n-s+t}$ обозначим через M^{k-s+t}. Точки $z \in M^{k-s+t}$, для которых существует подпространство $P^{n-k-1+t}$, содержащее точку z и подпространство Q и имеющее с касательным к M^{k-s+t} в точке z подпространством пересечение размерности $\geqslant t$, образуют $2(k-s)$-мерный цикл Π_t^{k-s} многообразия M^k. Оказывается, что $2(k-s)$-мерный цикл Черна Γ^{k-s} многообразия M^k определяется формулой*

$$\Gamma^{k-s} = \sum_{t=0}^{s} (-1)^t \binom{k-t+1}{k-s+1} \Pi_t^{k-s}. \qquad (3)$$

При $s=k$ формула (3) дает способ вычисления эйлеровой характеристики $\chi(M^k)$ многообразия M^k:

$$\chi(M^k) = \sum_{t=0}^{k} (-1)^t (k-t+1) \operatorname{Ind}(\Pi_t^0),$$

где $\operatorname{Ind}(\Pi_t^0)$ является классом t-мерного пересечения M^t многообразия M^k с подпространством $P^{n-k+t} \subset P^n$.

В недавно появившейся заметке Kundert'a ([5]) содержатся заведомо неверные формулы для вычисления циклов Γ^{k-s}. Они дают неверный результат даже для эйлеровой характеристики плоской алгебраической кривой. Приведенные там формулы содержат лишь первый член $\binom{k+1}{k-s+1} \Pi_0^{k-s}$ формулы (3).

Московский государственный
университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 III 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. Ehresmann, Ann. of Math., 35, 396 (1934). [2] Л. С. Понтрягин, Матем. сборн. 11 (53), 3 (1942). [3] S. Chern, Ann. of Math., 47, 1, 85 (1946). [4] В. А. Рохлин, ДАН, 84, № 3 (1952). [5] E. Kundert, Proc. Nat. Acad., 38, 10, 893 (1952).