Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 5

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР И. Н. ВЕКУА

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ МЕТАГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В настоящей работе изучаются вопросы полноты и замкнутости системы функций

$$U_{nm} \equiv (\lambda r)^{-1/2} J_{n+1/2}(\lambda r) P_{nm}(\cos\theta) \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix} \qquad (m \leqslant n), \tag{1}$$

которые являются решениями метагармонического уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \lambda^2 U \equiv \Delta U + \lambda^2 U \equiv 0 \quad (\lambda = \mathrm{const}) ; \tag{2}$$

$J_{n+1/2}$ — функции Бесселя первого рода, P_{nm} — функции Лежандра первого рода.

Функции (1) мы будем называть метагармоническими шаровыми функциями первого рода. При $\lambda = 0$ будем иметь гармонические полиномы, полнота и замкнутость которых изучены в работе автора [1].

Пусть S — замкнутая поверхность Ляпунова в пространстве, а D_i и D_e — внутренняя и внешняя области, ограниченные поверхностью S.

Обозначим через $\mathbf{S}(D_i)$ спектр собственных значений соответствующей однородной внутренней задачи Дирихле для уравнения $\Delta U + \lambda^2 U = 0$ относительно области D_i.

Теорема 1. *Система метагармонических шаровых функций* (1) *полна относительно поверхности S тогда и только тогда, когда $\lambda \,\overline{\in}\, \mathbf{S}(D_i)$. Если же $\lambda \in \mathbf{S}(D_i)$, то система* (1) *не полна относительно S, причем дефект ее равен m — рангу собственного значения λ.*

Доказательство. Надо доказать, что суммируемая функция $\nu(M)$ точки $M \in S$, отличная от нуля на множестве положительной (поверхностной) меры и удовлетворяющая равенствам

$$(\nu, U_{nm}) = \iint\limits_S \nu U_{nm}\, dS = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots ; \; m = 0, \ldots, n), \tag{3}$$

существует тогда и только тогда, когда $\lambda \in \mathbf{S}(D_i)$.

Нетрудно доказать, что равенства (3) равносильны следующему равенству:

$$\iint\limits_S \frac{e^{i\lambda R}}{R} \nu(M)\, dS_M = 0 \quad \text{при } P \in D_e, \quad \overline{MP} = R\,. \tag{4}$$

Для доказательства этого следует воспользоваться известными формулами сложения цилиндрических функций и полиномов Лежандра.

Если $\lambda \overline{\in} \mathbf{S}(D_i)$ и $\nu(M)$ непрерывна, то из (4) легко заключим, что $\nu(M) = 0$ [3, 4]. Если же $\nu(M)$ суммируема и $\lambda \overline{\in} \mathbf{S}(D_i)$, то и тогда можно доказать, что $\nu(M) = 0$ почти везде на S.

Пусть теперь $\lambda \in \mathbf{S}(D_i)$. Пусть $\varphi_1(P), \ldots, \varphi_m(P)$ — полная система соответствующих собственных функций. Как известно, $\varphi_1(P), \ldots, \varphi_m(P)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы в замкнутой области $D_i + S$ (см., например, [3], стр. 138). Так как $\varphi_k(P) = 0$ $(k = 1, \ldots, m)$ при $P \in S$, то по формуле Грина получим

$$\varphi_k(P) = \iint_S \mu_k(M) \frac{e^{i\lambda R}}{R} dS_M, \quad \mu_k = \frac{1}{4\pi} \frac{d\varphi_k}{dn_M} \qquad (k = 1, \ldots, m). \tag{5}$$

Очевидно, $\mu_1, \ldots, \mu_m$ линейно независимы и их можно подчинить условиям: $(\mu_k, \mu_j) = \delta_{kj}$. Так как потенциалы простого слоя (5) обращаются в нуль на поверхности S и на бесконечности удовлетворяют условию излучения, то, согласно единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения $\Delta U + \lambda^2 U = 0$ (см. [3], стр. 138), они обращаются в нуль всюду в D_e. Это доказывает, что функции $\mu_1, \ldots, \mu_m$ удовлетворяют равенствам (3). Нетрудно доказать, что любая функция, удовлетворяющая этим равенствам, является линейной комбинацией $\mu_1, \ldots, \mu_m$. Это значит, что дефект системы (1) равен m, т. е. рангу собственного значения λ. Иными словами, если к системе (1) добавим функции $\mu_1, \ldots, \mu_m$, то получим полную относительно S систему функций. Таким образом, теорема доказана полностью.

Ортогонализируя систему (1) относительно поверхности S, получим ортонормальную систему метагармонических функций $\{V_n(x, y, z)\}$: $(V_n, V_m) = \delta_{nm}$.

Теорема 2. *Пусть $\lambda \overline{\in} \mathbf{S}(D_i)$. Тогда система метагармонических функций $\{V_n(P)\}$ замкнута, т. е. для любых двух функций $f(M)$ и $g(M) \in L_2(S)$ имеет место равенство*:

$$\iint_S fg\, dS \equiv (f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, V_n)(g, V_n). \tag{6}$$

Эта теорема легко доказывается при помощи теоремы Фишера — Рисса и теоремы 1.

Из этой теоремы вытекает, что ряд Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} (f, V_n) V_n(M)$ сходится в среднем к функции $f(M)$, если $f \in L_2(S)$.

Теорема 3. *Если $\lambda \overline{\in} \mathbf{S}(D_i)$, то метагармоническая в области D_i функция $U(P)$, принимающая на S значения непрерывной функции $f(M)$, разлагается в ряд*

$$U(P) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, V_n) V_n(P), \tag{7}$$

который абсолютно и равномерно сходится внутри D_i.

Доказательство. Так как $\lambda \overline{\in} \mathbf{S}(D_i)$, то метагармоническую в D_i функцию $U(P)$, принимающую на S значения непрерывной функции $f(M)$, можно представить по формуле

$$U(P) = \iint_S f(M) \frac{d\Gamma(P, M, \lambda)}{dn_M} dS_M, \tag{8}$$

где $\Gamma(P, Q, \lambda)$ — функция Грина, соответствующая внутренней задаче Дирихле для уравнения $\Delta U + \lambda^2 U = 0$. Если в (6) $g(M) = \dfrac{d\Gamma(P, M, \lambda)}{dn_M}$, где $P \in D_i$, $M \in S$, то, в силу (8), получим разложение (7). С помощью (6) получим также разложение

$$K(P, Q, \lambda) = \iint \frac{d\Gamma(P, M, \lambda)}{dn_M} \frac{d\Gamma(Q, M, \lambda)}{dn_M} dS_M = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(P) V_n(Q), \qquad (9)$$

сходящееся при $P, Q \in D_i$. Полагая здесь $P = Q \in D_i$, будем иметь положительный ряд

$$K(P, P, \lambda) = \iint_S \left(\frac{d\Gamma(P, Q, \lambda)}{dn_Q} \right)^2 dS_Q = \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2(P), \qquad (10)$$

который сходится внутри D_i к непрерывной функции $K(P, P, \lambda)$. Согласно теореме Дини, ряд (10) будет сходиться равномерно внутри D_i. С помощью этого факта легко докажем, что ряд (7) сходится абсолютно и равномерно внутри D_i, что и требовалось доказать.

Пусть $G_0(P)$ — гармоническая функция в D_e, которая обращается в нуль на S и в единицу на бесконечности. Пусть S_ρ — поверхность уровня $G_0 = \rho$, $0 \leqslant \rho < 1$. Очевидно, $S_{\rho'}$ содержится целиком внутри $S_{\rho''}$, если $\rho' < \rho''$, причем $S_0 \equiv S$.

Лемма. *Пусть $U(P)$ — метагармоническая в D_i функция, непрерывная в $D_i + S$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta(\varepsilon) > 0$, что любой поверхности уровня S_ρ при $\rho \leqslant \eta(\varepsilon)$ можно сопоставить такую метагармоническую внутри S_ρ функцию $U_\rho(P)$, которая удовлетворяет неравенству*:

$$|U(P) - U_\rho(P)| < \varepsilon \text{ при } P \in D_i + S, \quad \rho \leqslant \eta(\varepsilon). \qquad (11)$$

Доказательство этой леммы мы здесь не приводим. Оно не встречает принципиальных трудностей.

Теорема 4. *Всякую метагармоническую в области D_i и непрерывную в $D_i + S$ функцию $U(P)$ можно приблизить равномерно в замкнутой области $D_i + S$ посредством метагармонических полиномов.*

Доказательство. В неравенстве (11) число ρ можно выбрать так, чтобы $\lambda \overline{\in} \mathbf{S}(D_\rho)$, где D_ρ — область, ограниченная S_ρ, $0 < \rho \leqslant \eta(\varepsilon)$. Тогда, согласно теореме 3, метагармоническую функцию $U_\rho(P)$ можно приблизить равномерно в замкнутой области $D_i + S \in D_\rho$ посредством метагармонических полиномов. Пользуясь далее неравенством (11), легко покажем справедливость нашей теоремы.

Теорема 5. *Любую непрерывную на S функцию $f(M)$ можно приблизить равномерно посредством метагармонических полиномов тогда и только тогда, когда $\lambda \overline{\in} \mathbf{S}(D_i)$.*

Доказательство этой теоремы легко получается при помощи теорем 1 и 4.

Приведенные результаты легко обобщаются на многомерные пространства. В случае плоскости они вытекают из более общих результатов автора, относящихся к уравнениям эллиптического типа с аналитическими коэффициентами [2]. Аналогичные теоремы можно доказать также и в случае конечной или бесконечной области, ограниченной конечным числом поверхностей Ляпунова.

Например, в случае бесконечной области D_e в качестве исходной системы метагармонических функций следует брать функции

$$(\lambda r)^{-1/2} H_{n+1/2}^{(1)}(\lambda r) P_{nm}(\cos\theta) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} \quad (m \leqslant n), \qquad (12)$$

которые на бесконечности удовлетворяют условию излучения. Здесь $H_n^{(1)}$ — функции Ганкеля; начало координат берется внутри S.

Теорема 6. *Система* (13) *полна относительно любой поверхности Ляпунова S при любом значении параметра λ**.

Поступило
23 III 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа, ДАН, **90**, № 4 (1953). [2] И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, 1948. [3] И. Н. Векуа, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, **12** (1943). [4] И. Н. Векуа, Сообщ. АН Груз.ССР, **4**, № 4 (1943). [5] H. Weyl, Math. Z., **55**, 2 (1952). [6] C. Müller, ibid., **56**, 1 (1952). [7] F. Rellich, Jahresber. D. M. V., **53** (1943). [8] А. Зоммерфельд, Дифференциальные уравнения в частных производных физики, 1950.

* При доказательстве этой теоремы, а также других теорем, приведенных выше, приходится существенным образом пользоваться теоремами существования и единственности внешней задачи Дирихле для уравнения $\Delta U + \lambda^2 U = 0$. Эти теоремы для зздач Дирихле и Неймана строго доказаны в 1943 г. в работах автора ([3], [4]). В 1952 г. вышли в свет работы Г. Вейля ([5]) и К. Мюллера ([6]), посвященные доказательству существования решения внешней задачи Дирихле. Предложенный в работе Мюллера способ, упрощающий метод Р. Вейля, сходен со способом, указанным нами в 1943 г. в работах ([3], [4]).

В упомянутых задачах существенное значение имеет доказанная в работе ([4]) лемма 3 (стр. 135):

«Если для функции $U(P)$, метагармонической в D_e, $\iint_{\Sigma} |U|^2 d\Sigma \to 0$ при стремлении радиуса сферы Σ к бесконечности, то $U(P) = 0$ всюду в D_e» (параметр λ считается здесь вещественным).

Другое доказательство этой же леммы, принадлежащее Ф. Рэлиху ([7]), опубликовано в Германии также в 1943 г. В упомянутых же работах Вейля и Мюллера автором леммы назван только Рэлих. Такие же неполные сведения содержатся в книге А. Зоммерфельда ([8]).