Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 5

МАТЕМАТИКА

А. З. ВАЛЬФИШ

ИЗОЛИРОВАННЫЕ ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 31 III 1953)

В этой заметке буквы d, j, k, n обозначают положительные целые числа; y — положительные четные; x — действительные числа, причем $\log\log\log x > 1$; p и q — простые. Буквой B без индексов обозначаются действительные числа, по модулю не превосходящие абсолютных констант.

Серпинский [1] доказал очень просто, с помощью теоремы Дирихле об арифметической прогрессии, что имеются двусторонне изолированные простые, в следующем смысле:

Для каждого n имеется такое $p > n$, что ни одно из чисел $p \pm j$; $j = 1, 2, \ldots, n$, не является простым.

Моей задачей будет вывести некоторые следствия из одной теоремы Шнирельмана о простых числах-близнецах для проблемы Серпинского.

Простое p назову y-близнецом, если имеется простое q, для которого либо $p - q = y$, либо $q - p = y$. Число таких $p \leqslant x$ пусть будет $A(y, x)$. Брун [2] доказал, что

$$A(2, x) = B\frac{x}{\log^2 x}. \tag{1}$$

Эта оценка была затем обобщена Шнирельманом ([3], лемма 3) следующим образом:

Если $y < x$, то

$$A(y, x) = B\frac{x}{\log^2 x}\prod_{\substack{p \mid y \\ p > 2}}\frac{p-1}{p-2}. \tag{2}$$

Доказательство оценки (2) не приводится Шнирельманом ввиду того, что оно протекает аналогично доказательству оценки (1) у Бруна. Впоследствии детальное доказательство оценки (2) Шнирельмана в эквивалентной форме

$$A(y, x) = B\frac{x}{\log^2 x}\prod_{p \mid y}\left(1 + \frac{1}{p}\right) \tag{3}$$

было дано с помощью метода Бруна Ландау ([4], лемма 23; см. также [5], теорема 88).

С другой стороны,

$$\prod_{p \mid y}\left(1 + \frac{1}{p}\right) = B\log\log y. \tag{4}$$

Это следует из того, что

$$\prod_{p \mid y}\left(1+\frac{1}{p}\right)=B\prod_{p \mid y}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=B\frac{y}{\varphi(y)},$$

в соединении с известной оценкой

$$\frac{n}{\varphi(n)}=B\log\log n$$

(см. ([6]), 217).

На основании (4) из оценки (2), т. е. (3), Шнирельмана вытекает, что

$$A(y, x)=B\frac{x\log\log\log x}{\log^2 x} \quad \text{для } y\leqslant\log x. \tag{5}$$

Пусть $M_1(x)$ — множество всех y-близнецов $p\leqslant x$, $\log\log\log p>1$, $y\leqslant\log x$ $(\log\log\log x)$. Пусть, далее, $M_2(x)$ есть множество простых $p\leqslant x$, $\log\log\log p>1$, не входящих в $M_1(x)$. Число простых в множестве $M_1(x)$ обозначу $\rho_1(x)$, а в множестве $M_2(x)$ обозначу $\rho_2(x)$. Тогда, на основании (5),

$$\rho_1(x)=B\frac{x\log\log\log x}{\log^2 x}\frac{\log x}{(\log\log\log x)^2}=B\frac{x}{\log x\log\log\log x}.$$

С другой стороны,

$$\rho_1(x)+\rho_2(x)\sim\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}.$$

Поэтому

$$\rho_2(x)\sim\frac{x}{\log x}. \tag{6}$$

Пусть теперь M есть множество тех простых p, где $\log\log\log p>1$, для которых ближайшее к p простое q удовлетворяет условию

$$|q-p|>\frac{\log p}{(\log\log\log p)^2}. \tag{7}$$

Простые, входящие в это множество M, назову с и л ь н о и з о л и р о в а н н ы м и. Пусть $M(x)$ обозначает множество всех сильно изолированных $p\leqslant x$, а $\rho(x)$ — их число. По определению множества $M_2(x)$, для всякого простого p этого множества имеем, если q обозначает простое, ближайшее к p:

$$|q-p|>\frac{\log x}{(\log\log\log x)^2}\geqslant\frac{\log p}{(\log\log\log p)^2},$$

откуда условие (7) выполнено. Поэтому $M_2(x)$ является подмножеством множества $M(x)$; следовательно, $\rho(x)\geqslant\rho_2(x)$. В соединении с (6) отсюда вытекает

$$\rho(x)\sim\frac{x}{\log x}\sim\pi(x). \tag{8}$$

Словами:

Почти все простые являются сильно изолированными. В частности, почти все простые являются двусторонне изолированными в смысле Серпинского.

Далее, если $q_1<q_2<q_3<\cdots$ являются совокупностью сильно изолированных простых чисел, записанных в порядке возрастания, то, повторяя рассуждение, проделываемое для обычных простых чисел (см. ([6]), 214), получаю

$$q_n \sim n \log n. \tag{9}$$

Наконец, из (8) следует:

Для любого k имеется ряд из k последовательных простых чисел

$$p_n,\ p_{n+1}, \ldots, p_{n+k-1},$$

являющихся в то же время сильно изолированными.

Действительно, если допустить для некоторого k противное, то, коль скоро $n \geqslant n_0(k)$, в любом промежутке

$$q_n \leqslant x \leqslant q_{n+k-1}$$

имелось бы, по крайней мере, $k+1$ простое число. Но это значило бы, что

$$\limsup_{x=\infty} \frac{\rho(x)}{\pi(x)} \leqslant \frac{k}{k+1},$$

вопреки (8).

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук Грузинской ССР

Поступило
6 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Sierpinski, Coll. Math., **1**, 193 (1948). [2] V. Brun, Skr. Vidensk. Selsk. Kristiania, 1, Mat.-Naturw. Kl., **1**, 1 (1920). [3] Л. Г. Шнирельман, Изв. Донского политехн. ин-та, Новочеркасск, **14**, 3 1930; перепечатано в Усп. матем. наук, **6**, 9 (1939). [4] E. Landau, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 255 (1930). [5] E. Landau, Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie, 1937. [6] E. Landau, Handb. d. Lehre von der Verteilung der Primzahlen, 1909.