Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 5

МАТЕМАТИКА

Б. М. БРЕДИХИН

О ХАРАКТЕРАХ ЧИСЛОВЫХ ПОЛУГРУПП С ДОСТАТОЧНО РЕДКОЙ БАЗОЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 10 IV 1953)

В этой заметке излагается обобщение результатов для сумматорных функций характеров числовых полугрупп с конечной базой [1] на случай бесконечной достаточно редкой базы.

Примем следующие обозначения [1-3]. Пусть имеется мультипликативная полугруппа G положительных вещественных чисел $\alpha \geqslant 1$ с бесконечной базой $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i, \ldots$ $(\omega_i > 1)$. Наличие базы в G означает, что каждое число $\alpha \in G$ однозначно представимо в форме $\alpha = \omega_1^{x_1}\omega_2^{x_2}\ldots$, где $\omega_i \in G$ и x_i — целые неотрицательные числа.

Пусть в промежутке $[1, e^x]$ при произвольном $x > 0$ находится конечное число $\pi = \pi(x)$ базисных чисел полугруппы G и $\lim\limits_{x\to\infty} \pi(x) = \infty$.

Введем в рассмотрение нормированный характер $\chi(\alpha)$ полугруппы G:

1° $|\chi(\alpha)| = 1$ для $\alpha \in G$.

2° $\chi(\alpha\beta) = \chi(\alpha)\chi(\beta)$ для $\alpha, \beta \in G$.

Характер $\chi(\alpha)$ определяется своими значениями на базе. Частным случаем таких характеров являются «обобщенные характеры» Дирихле [2, 3].

Сумматорную функцию характера $\chi(\alpha)$ обозначаем через

$$H(x) = \sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant e^x} \chi(\alpha).$$

Ради сокращения письма будем употреблять обозначения: $\lg_2 x =$; $= \lg\lg x$, $\lg_3 x = \lg\lg\lg x$ и т. д.; $e_2(x) = e^{e^x}$, $e_3(x) = e^{e^{e^x}}$ и т. д.

Нашей целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть $\chi(\alpha)$ — нормированный характер полугруппы G $x \to \infty$.*

1. *Если одно из чисел $\chi(\omega_k) = 1$, а*

$$\pi(x) = O(\lg x),$$

то

$$H(x) = \Omega(x^\mu) \quad (0 < \mu < 1).$$

2. *Если все числа $\chi(\omega_i)$ отличны от единицы, но среди базисных чисел имеются два числа ω_k и ω_l таких, что число $\vartheta = \dfrac{\lg \omega_k}{\lg \omega_l}$ разлагается в цепную дробь*

$$[a_0, a_1, \ldots, a_\nu, \ldots]$$

с медленно растущими неполными частными

$$a_\nu = O\left(e_m(c\nu)\right) \tag{1^1}$$

и знаменателями подходящих дробей

$$q_{\nu+1} = O\left(e^{q_\nu^\rho}\right), \tag{1^2}$$

где $0 < \rho < 1$, *причем*

$$\pi(x) = O\left(\lg_{m+1} x\right),$$

то

$$H(x) = \Omega\left((\lg_m x)^\mu\right) \quad (0 < \mu < 1/2).$$

Условия (1) теоремы выполнены для почти всех последовательностей $\omega_1, \omega_2, \ldots$, как это легко проверить, исходя из элементов метрической теории цепных дробей.

Нам потребуются еще следующие определения и обозначения.

Выберем из базы полугруппы G числа $\omega_1, \ldots, \omega_\lambda$ и фиксируем их. Пусть $e^x > \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant \lambda} \omega_i$. Совокупность базисных чисел из промежутка $[1, e^x]$ разобьется тогда на две совокупности: $\omega_1, \ldots, \omega_\lambda$ и $\omega_{\lambda+1}, \ldots, \omega_\pi$.

Введем теперь в рассмотрение два новых характера: $\chi_\lambda(\alpha)$ — характер полугруппы g_λ с базой $\omega_1, \ldots, \omega_\lambda$ и с сумматорной функцией $H_\lambda(x)$; $\chi_\pi(\alpha)$ — характер полугруппы g_π с базой $\omega_1, \ldots, \omega_\lambda, \omega_{\lambda+1}, \ldots, \omega_\pi$ и с сумматорной функцией $H_\pi(x)$.

Очевидно, $g_\lambda \subset g_\pi \subset G$.

При этом полагаем

$$\begin{aligned} \chi_\lambda(\omega_i) = \chi_\pi(\omega_i) = \chi(\omega_i) \quad & \text{для } \omega_i \in g_\lambda, \\ \chi_\pi(\omega_i) = \chi(\omega_i) \quad & \text{для } \omega_i \in g_\pi. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$H_\pi(u) = H(u) \quad \text{для } u \in [0, x]. \tag{2}$$

Будем рассматривать при фиксированном x L-функции характеров χ_λ и χ_π

$$L(s, \chi_\lambda) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\chi_\lambda(\alpha_\nu)}{\alpha_\nu^s} = \prod_{i=1}^{\lambda} \left(1 - \chi_\lambda(\omega_i)\, \omega_i^{-s}\right)^{-1}$$

и

$$L(s, \chi_\pi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\chi_\pi(\alpha_\nu)}{\alpha_\nu^s} = \prod_{i=1}^{\pi} \left(1 - \chi_\pi(\omega_i)\, \omega_i^{-s}\right)^{-1}$$

(ряды абсолютно сходятся при $\sigma > 0$, где $\sigma = \operatorname{Re} s$).

Обозначим

$$M_\lambda = \max_{u \in [0, x]} |H_\lambda(u)|, \quad M(x) = \max_{u \in [0, x]} |H(u)|. \tag{3}$$

Введем еще функцию Мёбиуса $\mu(\alpha)$ полугруппы g_π:

$$\mu(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = 1; \\ -1, & \text{если } \alpha = \omega_i; \\ 0, & \text{если } \omega_i^2 / \alpha; \\ (-1)^l, & \text{если } \alpha = \omega_{k_1} \ldots \omega_{k_l}. \end{cases} \qquad (\alpha \in g_\pi) \tag{4}$$

При этом $d = \omega_{k_1} \ldots \omega_{k_l}$ будет обозначать делитель числа $P = \omega_{\lambda+1} \ldots \omega_\pi$.

Лемма.

$$M_\lambda(x) \leqslant 2^{\pi-\lambda} M(x). \tag{5}$$

Доказательство. Известную теорему из теории L-рядов Дирихле [4] можно сформулировать так:

Пусть ряд

$$f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\alpha_\nu^s},$$

где $1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_\nu < \ldots$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = \infty$, *имеет своей абсциссой сходимости число* β; *пусть, далее, положительное* $a > \beta$; *тогда*

$$\sum_{1\leqslant\alpha_\nu\leqslant e^x}{}' a_\nu = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-iT}^{a+iT} \frac{e^{xs} f(s)}{s} ds, \tag{6}$$

где x — *произвольное положительное число, а* Σ' *обозначает, что последнее слагаемое левой части равенства нужно брать с коэффициентом, равным* $1/2$, *если* $e^x = \alpha_{\nu_0}$.

Полагаем в формуле (6) в одном случае $f(s) = L(s, \chi_\lambda)$, в другом случае $f(s) = L(s, \chi_\pi)$.

Принимая во внимание, что

$$L(s, \chi_\lambda) = L(s, \chi_\pi) \prod_{i=\lambda+1}^{\pi} (1 - \chi(\omega_i)\, \omega_i^{-s}),$$

после некоторых несложных преобразований получим тождество, для записи которого используем формулу (4):

$$H_\lambda(x) = \sum_{d/P} \mu(d)\, \chi_\pi(d)\, H_\pi(x - \lg d).$$

Отсюда следует, что

$$|H_\lambda(x)| \leqslant 2^{\pi-\lambda} \max_{u\in[0,\,x]} |H_\pi(x)|. \tag{7}$$

Принимая во внимание (2), (3) и (7), получим неравенство (5).

Доказательство теоремы. 1. Можем считать, что $\omega_h = \omega_1$. В неравенстве (5) полагаем $\lambda = 1$. Получим

$$M_1(x) < 2^\pi M(x). \tag{8}$$

Но

$$H_1(x) = \sum_{1\leqslant\omega_1^{x_1}\leqslant e^x} \chi_1(\omega_1^{x_1}) \sim x,$$

следовательно,

$$M_1(x) \geqslant C_1 x. \tag{9}$$

Теперь из формул (8) и (9) и из условия, ограничивающего рост $\pi(x)$, следует, что

$$M(x) \geqslant C_2 x^\mu,$$

т. е.

$$H(x) = \Omega(x^\mu).$$

2. Можем считать, что $\omega_k = \omega_1$, $\omega_l = \omega_2$. В неравенстве (5) полагаем $\lambda = 2$. Получим

$$M_2(x) < 2^{\pi} M(x). \tag{10}$$

Оценка $H_2(x)$ проводится тем же методом, как в [1], небольшое изменение нужно внести только в формулировку леммы 4 [1]. Оценка эта теперь такова:

$$H_2(x) = \Omega\left(\sqrt{\lg_m x}\right).$$

Следовательно, для бесконечного множества значений $x^l \to \infty$

$$M_2(x^l) \geqslant C_3 \sqrt{\lg_m x^l}. \tag{11}$$

Теперь из формул (10) и (11) и из условия, ограничивающего рост $\pi(x)$, следует, что

$$M(x^l) \geqslant C_4((\lg_m x^l)^{\mu}),$$

т. е.

$$H(x)\,\Omega((\lg_m x)^{\mu}).$$

Заметим, что если $m = 2$, то достаточно выполнения первой части условия (1). Нужно только взять $c < {}^1/_4 \lg 2$.

Требование алгебраичности ω_k и ω_l при условии $\pi(x) = O(\lg_1 x)$ дает

$$H(x) = \Omega((\lg_3 x)^{\mu}) \quad (0 < \mu < {}^1/_2).$$

Это утверждение следует из выполнимости условия (1) теоремы при $m = 3$, $c = 2$.

Считаю приятным долгом выразить глубокую благодарность проф. Н. Г. Чудакову, давшему мне ценные указания при выполнении этой работы.

Поступило
8 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Г. Чудаков, А. К. Павлючук, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 38, 366 (1951). [2] Н. Г. Чудаков, К. А. Родосский, ДАН, 73, № 6 (1950). [3] Н. Г. Чудаков, Ю. В. Линник, ДАН, 74, № 2 (1950). [4] Н. Г. Чудаков, Введение в теорию L-функций Дирихле, 1947.