Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 5

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

СЛАБО ВЕСОВЫЕ ФУНКЦИИ И МАЙОРАНТЫ

Установим сначала новую форму теоремы B заметки ([2]), соответствующую теореме A* заметки ([1]).

Теорема B*. *Для того чтобы четная монотонно возрастающая при $x > 0$ (м. в. ч.) функция $\Phi(x) > 0$ была слабо весовой ($\Phi(x) \in V$), необходимо и достаточно, чтобы для всех функций $G_p(x)$ данной степени p с четным модулем $|G_p(x)| \leqslant \Phi(x)$ была бесконечна верхняя грань значений*

$$\int_0^\infty \frac{\log|G_p(x)/G_p(0)|}{x^2}\,dx.$$

Для доказательства нужно проверить, что это условие и условие теоремы B эквивалентны. Для этого достаточно заменить равенство (17) моей заметки ([2]) соответствующим неравенством. А именно, при помощи интегрирования по контуру, образованному диаметром $(-R, R)$ и полуокружностью бесконечно возрастающего радиуса R, можно убедиться, что при $G_p(0) = 1$ справедливо неравенство

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log|G_p(x)|}{x^2}\,dx - 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\beta_k|}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\right| \leqslant \pi p. \tag{1}$$

Применение теорем A* и B* вместо теорем A и B заметок ([1, 2]) позволит нам другим способом доказать и усилить теоремы ([2]) C и D.

Теорема I. *Всякая м. в. ч. функция $\Phi(x) > 0$ является либо слабо весовой, либо майорантой квази-конечного роста* ([3]) ($\Phi(x) \in \mathfrak{M}^*$).

Теорема II. *Всякая м. в. ч. функция $\Phi(x) > 0$ является либо весовой функцией, либо майорантой квази-конечного роста для многочленов ($\Phi(x) \in \mathfrak{M}_M^*$) (т. е. из возможности при любом $\varepsilon > 0$ неравенства,*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon\Phi(x) \quad (-\infty < x < \infty), \tag{2}$$

где $P(x)$ — многочлены: следует, что $f(x)$ есть целая функция конечной степени).

Действительно, согласно теореме ([1]) A* (соответственно, B*), если $\Phi(x) \in \overline{W}$ (соответственно, $\Phi(x) \in \overline{V}$), то, каков бы ни был имеющий четный модуль многочлен $P(x)$ $(|P(0)| = 1)$ (соответственно, $P(x)$ — целая четная функция данной степени p), неравенство

$$|P(x)| \leqslant \Phi(x) \quad (-\infty < x < \infty) \tag{3}$$

влечет за собой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log|P(x)|}{x^2}\,dx \leqslant M_p \quad (|P(0)| = 1), \tag{4}$$

где постоянная M_p зависит только от $\Phi(x)$ (и, соответственно, также от p). Без ущерба для общности заключения ограничимся предположением*, что $\log|P(x)| > -a > -\infty$. Тогда из (4) следует

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+|P(x)|}{1+x^2}\,dx \leqslant M_p + a\pi = M_p'. \tag{4$^{\text{bis}}$}$$

Напомню далее, что на окружности радиуса b верхняя грань модулей многочленов $|P(be^{i\theta})|$ (или функций конечной степени p, для корней $\alpha_k + i\beta_k$ которых ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\beta_k|}{\alpha_k^2+\beta_k^2}$ сходится), имеющих данный четный модуль $|P(x)|$ на всей вещественной оси, достигается в точке bi тем из рассматриваемых многочленов $P(z)$, который имеет все корни в нижней полуплоскости (см. [4], стр. 164).

Ввиду этого замечания, применяя известное неравенство Карлемана [5], мы запишем это неравенство только для $z = bi$ $(0 < b < R)$:

$$\frac{\log|P(bi)|}{b} \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{-R}^{R} \log|P(x)| \cdot \left\{\frac{1}{x^2+b^2} - \frac{R^2}{R^4+x^2b^2}\right\} dx + \rho, \tag{5}$$

где

$$\rho = \frac{2R}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \log|P(Re^{i\varphi})| \frac{(R^2-b^2)\sin\varphi}{|R^2e^{2i\varphi}+b^2|^2}\,d\varphi \leqslant \frac{2R}{\pi(R^2-b^2)}\int\limits_0^{\pi}\log|P(Re^{i\varphi})|\sin\varphi\,d\varphi. \tag{5$^{\text{bis}}$}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $P(x)$ многочлен $(p = 0)$. Полагая $R \to \infty$ (при фиксированном $b > 1$), видим, что $\rho \to 0$, так как $\overline{\lim\limits_{R\to\infty}} \frac{\log|P(Re^{i\varphi})|}{R} = 0$. Поэтому для всех многочленов, удовлетворяющих (4^{bis}), при $b \geqslant 1$, имеем одну и ту же оценку

$$\frac{\log|P(bi)|}{b} \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+|P(x)|}{x^2+b^2}\,dx < \frac{M_0'}{\pi}. \tag{6}$$

Таким образом, из сделанного выше замечания следует, что в круге любого данного радиуса $b > 1$ $(|z| = b)$ имеем

$$|P(z)| < e^{\frac{M_0'}{\pi}|z|}. \tag{7}$$

Следовательно, применяя теорему Стилтьеса так же, как в [2], мы убеждаемся, что если $f(x)$ удовлетворяет (2), то $f(x)$ должна быть целой функцией конечной степени $p \leqslant M_0'/\pi$. Теорема II доказана**.

Аналогично доказывается теорема I с той только разницей, что в случае, когда $P(x) = G_p(x)$ есть (каноническая) целая функция конечной степени $p > 0$, являющаяся, благодаря (4^{bis}), аддитивной майорантой [6], мы используем для оценки ρ в неравенстве (5) то обстоятельство, что она имеет индикаторной диаграммой отрезок мнимой

---

* Полагая, например, многочлен $P(x)$ вещественным ($P(0) = 1$, $\Phi(0) > 1$), можем ввести $P_1(x) = \frac{P(x)+i}{1+i}$, тогда $\sqrt{\frac{1}{2}} \leqslant |P_1(x)| = \sqrt{\frac{P^2(x)+1}{2}} < \Phi(x)$, $|P_1(0)| = 1$. Но теоремы I и II, верные для $P_1(x)$, верны также для $P(x)$.

** Если $f(x)$ не четная вещественная функция, рассматриваем функцию $f(x) \pm \pm if(-x)$ с четным модулем $\sqrt{f^2(x)+f^2(-x)}$.

оси $[-pi, pi]$ (см. теорему II заметки [6]). Поэтому из (5^{bis}) получим

$$\rho \leqslant \frac{2R^2}{\pi(R^2-b^2)} \int_0^\pi \frac{1}{R} \log |G_p(Re^{i\varphi})| \sin\varphi \, d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2R^2}{\pi(R^2-b^2)} \int_0^\pi (p+\alpha) \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{R^2}{R^2-b^2}(p+\alpha), \tag{8}$$

где $\alpha \to 0$ при $R \to \infty$. Следовательно, при всяком фиксированном $b \geqslant 1$ мы получим вместо (6)

$$\frac{\log |G_p(bi)|}{b} \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |G_p(x)|}{x^2+b^2} dx + p < \frac{M_p'}{\pi} + p. \tag{9}$$

Следствие 1. *М. в. ч. функции $\Phi^\alpha(x)$ при любом $\alpha > 0$ принадлежат к тому же классу V, W, $\overline{V}$ или $\overline{W}$, что $\Phi(x) > c > 0$.*

Для всякого целого четного α это вытекает непосредственно из A^* (или B^*); откуда то же заключение получаем сначала для любого рационального α, а затем, переходом к пределу, — для всякого $\alpha > 0$.

Дальнейшие предложения уже не будут предполагать монотонности $\Phi(x)$ при $\pm x \to \infty$ и при своей большей общности они, как правило, не будут обратимы.

Следствие 2. *Какова бы ни была функция $F(x) > c > 0$, если для функций конечной степени $H_p(x)$ с четным модулем данной степени p, удовлетворяющих неравенству*

$$|H_p(x)| \leqslant F(x) \quad (-\infty < x < \infty), \tag{10}$$

соблюдается (4) *с определенным конечным M_p, зависящим только от $F(x)$ и p, то $F(x)$ будет майорантой квази-конечного роста ($F(x) \in \mathfrak{M}^*$). Аналогичное утверждение ($\mathfrak{M}_M^*$ вместо $\mathfrak{M}^*$), если в* (10) *стоят многочлены $P(x)$ вместо $H_p(x)$.*

Следствие 3. *Если при тех же условиях из неравенства* (10) *следует, что $|H_p'(0)| \leqslant C_p < \infty$, то $F(x) \in \mathfrak{M}^*$ (соответственно, если только для многочленов имеем $|P'(0)| \leqslant c_0 < \infty$, то $F(x) \in \mathfrak{M}_M^*$).*

Однако следствия 2 и 3 вообще необратимы без ограничения четности и монотонности $F(x)$, которое, согласно предыдущему, обеспечивает их обратимость.

Следствие 4. *Пусть $F(x) > 0$ — любая четная функция; если $F(x) \in W$ (или $F(x) \in V$), то $c + \int_0^{|x|} F(x)\,dx = \Phi(x) \in W$ (или V) при $c > 0$.*

Это вытекает из теоремы II и из (8) (стр. 258).

Теорема III. *Если четная функция $\Phi(x) > 1$ (независимо от предположения монотонности для $x \geqslant 0$) удовлетворяет условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \Phi(x)}{1+x^2} dx = M < \infty, \tag{11}$$

то $\Phi(x)$ должна быть майорантой конечного роста [7] *($\Phi(x) \in \mathfrak{M}$), (так что $\Phi(x) \in \overline{V}$ и $\Phi(x) \in \overline{W}$).*

Можем положить $|G_p(x)| \geqslant 1$. Тогда из неравенства

$$|G_p(x)| \leqslant \Phi(x) \quad (-\infty < x < \infty) \tag{12}$$

следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |G_p(x)|}{1+x^2} dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \Phi(x)}{1+x^2} dx = M \tag{13}$$

и для любого данного $b > 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |G_p(x)|}{x^2+b^2} dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \Phi(x)}{x^2+b^2} dx. \tag{14}$$

По теоремам I, II, из (13) следует, что $\Phi(x) \in \mathfrak{M}^*$, т. е. не может быть ни весовой, ни слабо весовой функцией. Но, более того, при произвольно малом ε можем взять L настолько большим, что

$$2\int_{L}^{\infty} \frac{\log \Phi(x)}{1+x^2} dx > \varepsilon. \tag{15}$$

Тогда, полагая $b^2 \geqslant \frac{L^2+1}{\varepsilon}$, из (11), (14) и (15) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |G_p(x)|}{x^2+b^2} dx < \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \Phi(x)}{x^2+b^2} dx < \int_{-L}^{L} \frac{\log \Phi(x)}{x^2+b^2} dx + \varepsilon <$$

$$< \varepsilon\left[1 + \int_{-L}^{L} \frac{\log \Phi(x)}{1+x^2} dx\right] < \varepsilon[1+M] = \alpha, \tag{16}$$

откуда, вследствие (9), для всех четных функций $G_p(z)$, удовлетворяющих (12), получаем при том же самом b

$$\sup \frac{\log |G_p(be^{i\varphi})|}{b} < p + \frac{\alpha}{\pi}, \tag{17}$$

и, следовательно, если в неравенствах (2) $P(x) = G_p(x)$ есть функция степени $p \geqslant 0$, то $f(x)$ также функция той же степени p.

Как видим, условие (11) теоремы III позволяет усилить и обобщить теоремы I и II, но только в одну сторону. Из теоремы III вытекает:

Следствие 5. *Пусть $F(x) > c > 0$ — любая измеримая функция. Для того чтобы $F(x)$ была майорантой конечного роста ($F(x) \in \mathfrak{M}$), достаточно, чтобы*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log F(x)}{1+x^2} dx < \infty. \tag{18}$$

Действительно, если $H_p(x)$ удовлетворяет (10), то она удовлетворяет и неравенству $|H_p(x)| \leqslant F(x) + F(-x) = \Phi(x)$, где $\Phi(x) > c > 0$ — четная функция, удовлетворяющая (11), к которой применима поэтому теорема III.

Заметим, что $F(x)$ есть аддитивная ([6]) майоранта, так как если $F_1(x) > c_1 > 0$ также удовлетворяет условию (18), то и $F(x) + F_1(x)$ удовлетворяет ([6]) (18). Из следствия 5 вытекает:

Следствие 6. (Обобщение теоремы Ахиезера — Бабенко). *Для того чтобы любая функция $F(x) > 0$ была слабо весовой (или весовой), необходимо, чтобы*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ F(x)}{1+x^2} dx = \infty.$$

Поступило
27 IV 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, ДАН, 88, № 4 (1953). [2] С. Н. Бернштейн, ДАН, 90, № 4 (1953). [3] С. Н. Бернштейн, ДАН, 65, № 2 (1949). [4] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, 1937. [5] N. Levinson, Gap and Density theorems (1940). [6] С. Н. Бернштейн, ДАН, 66, № 4 (1949). [7] С. Н. Бернштейн, ДАН, 60, № 6 (1948). [8] С. Н. Бернштейн, ДАН, 85, № 2 (1952). [9] Н. И. Ахиезер, К. И. Бабенко, ДАН, 57, № 4 (1937).