Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. К. БАРИ

ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ С. Н. БЕРНШТЕЙНА И А. А. МАРКОВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 V 1953)

1. Будем обозначать через $T_n(x)$ тригонометрический полином порядка не выше n.

Как известно, С. Н. Бернштейн (1) доказал замечательное неравенство: если $|T_n(x)| \leqslant M$ на $[-\pi, \pi]$, то $|T_n'(x)| \leqslant nM$ на том же отрезке. А. Зигмунд (2) перенес этот результат на пространства L^p при $p \geqslant 1$, т. е. он доказал, что если $\|T_n\|_p \leqslant M$ на $[-\pi, \pi]$, то $\|T_n'\|_p \leqslant nM$ на $[-\pi, \pi]$, где под $\| \ \|_p$ понимается норма в пространстве L^p.

Неравенства С. Н. Бернштейна и А. Зигмунда широко применяются как при изучении наилучших приближений функции тригонометрическими полиномами, так и при исследовании сходимости и суммируемости рядов Фурье и сопряженных к ним. Однако, чтобы пользоваться этими неравенствами, надо знать, какими свойствами обладает рассматриваемая функция на отрезке длины 2π; если же исследуется ее поведение на отрезке $[a, b]$ длины меньшей, чем 2π, то соответствующие теоремы теряют силу.

И. И. Привалов (3) получил неравенство, аналогичное неравенству С. Н. Бернштейна, в следующей форме: если $|T_n(x)| \leqslant M$ на $[a, b]$, то для любого отрезка $[a', b']$, лежащего целиком внутри (a, b), имеем $|T_n'(x)| \leqslant C(a', b')\, nM$, где постоянная $C(a', b')$ зависит только от a' и b'. Сам И. И. Привалов применил свой результат для получения теоремы: если ряд Фурье от функции с интегрируемым квадратом сходится на некотором множестве меры больше нуля, то сопряженный ряд сходится почти всюду на этом множестве. Джексон (4) передоказал неравенство И. И. Привалова и применял его в ряде своих работ, касающихся взвешенного приближения функций полиномами.

Теорему И. И. Привалова можно обобщить так:

Теорема 1. *Если* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ *и* $\|T_n\|_p \leqslant M$ *на* $[a, b]$, *то для любого отрезка* $[a', b']$, *целиком лежащего внутри* (a, b), *имеем* $\|T_n'\|_p \leqslant C(a', b')\, nM$ *на* $[a', b']$, *где* $C(a', b')$ — *постоянная, зависящая только от* a' *и* b'.

Неравенство И. И. Привалова и указанное здесь его обобщение позволяют «локализовать» целый ряд теорем, которые были доказаны ранее для отрезка длины 2π. Сейчас я укажу только, что как сам С. Н. Бернштейн, так и те, кто продолжал его исследования (в частности С. Б. Стечкин и С. М. Лозинский), применяли неравенство С. Н. Бернштейна для того, чтобы по наилучшим приближениям функции (в метрике C или L^p) на отрезке $[-\pi, \pi]$ судить об ее модуле непрерывности в метрике тех же пространств. Подобно этому неравенство И. И. Привалова и его обобщение позволяют по наилучшим приближениям функции на отрезке $[a, b]$ судить об ее модуле непрерывности на отрезке $[a', b']$ внутри (a, b). Кроме того, по поведению частных сумм ряда Фурье или их средних арифметических на $[a, b]$ можно судить о поведении аналогичных сумм для сопряженного ряда на $[a', b']$. Теоремы такого рода для отрезка $[-\pi, \pi]$ были даны целым рядом авторов.

2. Как известно, для обыкновенных многочленов $P_n(x)$ степени n неравенство С. Н. Бернштейна принимает вид: если $|P_n(x)| \leqslant M$ на $[a, b]$, то $|P_n'(x)| \leqslant \frac{nM}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ на (a, b). Отсюда, в частности, следует, что для любого $[a', b']$, целиком лежащего внутри (a, b), имеем $|P_n'(x)| \leqslant C(a', b')\,nM$, но оценку производной для всего отрезка $[a, b]$ таким способом дать нельзя. Оценка для всего отрезка была дана А. А. Марковым ([5]): если $|P_n(x)| \leqslant M$ на $[a, b]$, то $|P_n'(x)| \leqslant \frac{2}{b-a}\, n^2M$ на $[a, b]$, и эта оценка точная. Возникает, естественно, вопрос о переносе неравенства А. А. Маркова на тригонометрические полиномы, заданные на некотором отрезке $[a, b]$. Джексон ([6]) доказал, что из $|T_n(x)| \leqslant M$ на $[a, b]$ следует $|T_n'(x)| \leqslant Cn^2M$ на $[a, b]$, где C зависит только от a и b.

Оказывается, это неравенство справедливо и для пространств L^p при $p \geqslant 1$, т. е. имеет место теорема:

Теорема 2. *Если* $\|T_n(x)\|_p \leqslant M$ *на* $[a, b]$, *то* $\|T_n'\|_p \leqslant Cn^2M$ *на* $[a, b]$, *где* C *зависит только от* a *и* b.

Та же *теорема справедлива, если вместо тригонометрического полинома рассматривать многочлен n-й степени.* Это значит, что классическая теорема А. А. Маркова переносится на пространства L^p при $p \geqslant 1$. Для случая $p = 2$ этот результат был получен Е. Шмидтом ([7]) при помощи приведения квадратических форм к каноническому виду.

Отметим, что при доказательстве теоремы 2 нам пришлось пользоваться одним неравенством, которое имеет и самостоятельный интерес, а именно:

Теорема 3. *Если* $\|T_n(x)\sin x\|_p \leqslant M$, *то* $\|T_n(x)\|_p \leqslant CnM$, *где обе нормы берутся на* $[-\pi, \pi]$, *а* C *— абсолютная константа.*

Теорема 3 должна рассматриваться как обобщение такой теоремы С. Н. Бернштейна (см. ([9]), стр. 167): если $|T_n \sin x| \leqslant M$ на $[-\pi, \pi]$, то $|T_n(x)| \leqslant (n+1)M$ на $[-\pi, \pi]$. Мы переносим это неравенство на пространства L^p.

Наконец, отметим, что все приведенные выше неравенства точны в смысле оценки порядка; вопроса о величинах входящих в них констант мы не касаемся.

3. Иногда бывает необходимо сравнивать нормы одной и той же функции в разных пространствах. С. М. Никольский ([8]) для тригонометрического полинома получил неравенство $\|T_n\|_q \leqslant 2n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|T_n\|_p$. Здесь нормы берутся на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$. Для отрезка длины меньшей, чем 2π, эта оценка теряет силу. Пользуясь теоремой 2, получаем для этого случая $\|T_n\|_q \leqslant C(a, b)\, n^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}}\|T_n\|_p$, где нормы берутся на $[a, b]$. Оценка в смысле порядка также точна.

Поступило
9 V 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Сообщ. Харьк. мат. об-ва, сер. 2, 13, 49 (1912) или Собр. соч., **1**, 1952, стр. 11. [2] A. Zygmund, Proc. Lond. Math. Soc., **34**, 392 (1932). [3] И. И. Привалов, C. R., **162** (1916); Интеграл Cauchy, Саратов, 1919. [4] D. Jackson, Trans. Am. Math. Soc., **26**, 133 (1924). [5] А. А. Марков, Изв. Акад. наук, СПб, **62**, 1 (1889). [6] D. Jackson, Bull. Am. Math. Soc., **37**, 883 (1931). [7] E. Schmidt, Math. Ann., **119**, 165 (1944). [8] С. М. Никольский, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **38**, 244 (1951). [9] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, 1937.