Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Д. Н. ЧЕТАЕВ

ОБ АКУСТИЧЕСКОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ДВИЖУЩЕГОСЯ ПЛОСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 III 1953)

Рассматривается полупространство $z > 0$, заполненное идеальной сжимаемой жидкостью, движущейся в направлении оси y с постоянной скоростью V, меньшей скорости звука u. В отверстии S жесткой стенки $z = 0$ колеблется по закону $\dot{z} = ve^{i\omega t}$ плоская пластина. Потенциал скоростей $\varphi e^{i\omega t}$ установившихся колебаний жидкости удовлетворяет уравнению [1]

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + (1-\beta^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - 2i\beta k\frac{\partial\varphi}{\partial y} + k^2\varphi = 0 \quad \left(k = \frac{\omega}{u},\ \beta = \frac{V}{u}\right)$$

при граничном условии

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \begin{cases} v \text{ внутри } S; \\ 0 \text{ вне } S. \end{cases}$$

Решение этой задачи, как известно [2], дается формулой

$$\varphi(P) = \frac{v}{2\pi}\iint\limits_{S'} \frac{e^{-ik'\beta(y'-y_0')}e^{-ik'r}}{r}\,dS', \tag{1}$$

где $k' = k/\sqrt{1-\beta^2}$, а $r = \sqrt{(x'-x_0')^2 + (y'-y_0')^2 + z_0'^2}$ есть расстояние от рассматриваемой точки поля $P(x_0', y_0', z_0')$ до элемента $dS'(x', y', 0)$ в координатах

$$x' = x, \quad y' = \frac{y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad z' = z.$$

Для вычисления акустического сопротивления (полного импеданса) пластины

$$Z = \frac{i\omega\rho}{v}\iint\limits_{S}\varphi\,dS \tag{2}$$

(ρ — плотность среды) достаточно знать потенциал (1) в точках пластины, рассмотрением которых мы и ограничимся. Перейдем от координат x', y' к полярным координатам r, θ с полюсом в рассматриваемой точке P пластины. Пусть контур пластины выпуклый, тогда его уравнение $r = r(\theta)$ будет однозначной функцией при $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Поэтому, учитывая, что $dS' = dx'dy' = r\,dr\,d\theta$, можно представить решение (1) для точек пластины в виде:

$$\varphi(P) = \frac{v}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r(\theta)} e^{-ik'(1+\beta\sin\theta)r}\,dr\,d\theta.$$

Проинтегрировав по r, получим

$$\varphi = -\frac{vi}{2\pi k'}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\beta\sin\theta} + \frac{vi}{2\pi k'}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ik'(1+\beta\sin\theta)r(\theta)}}{1+\beta\sin\theta}\,d\theta =$$

$$= -\frac{vi}{k} + \frac{vi}{2\pi k'}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ik'(1+\beta\sin\theta)\,r(\theta)}}{1+\beta\sin\theta}\,d\theta\,, \qquad (3)$$

так как

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\beta\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

Интеграл (2) берется в координатах x, y. Переходя к координатам x', y', получим

$$Z = \frac{i\omega\rho\sqrt{1-\beta^2}}{v}\iint_{S'}\varphi\,dS'.$$

Подставим сюда значение φ из (3):

$$Z = u\rho S\left[1 - \frac{1-\beta^2}{2\pi S}\iint_{S'}\int_0^{2\pi}\frac{\exp\left[-ik'(1+\beta\sin\theta)\,r(\theta)\right]}{1+\beta\sin\theta}\,d\theta\,dS'\right].$$

Отсюда видно, что акустическое сопротивление можно представить так:

$$Z = u\rho S\left[1 - Y(ka) + iX(ka)\right],$$

где a — некоторый линейный размер области S, а вид функций X и Y определяется только формой области и значением $\beta = V/u$. Действительно, произведя преобразование подобия

$$x' = ax_1', \quad y' = ay_1',$$

получим

$$Z = u\rho S\left[1 - (1-\beta^2)\frac{a^2}{2\pi S}\iint_{S_1'}\int_0^{2\pi}\frac{\exp\left[-\frac{ika}{\sqrt{1-\beta^2}}(1+\beta\sin\theta)\,r_1(\theta)\right]}{1+\beta\sin\theta}\,d\theta\,dS_1'\right]. \qquad (4)$$

Здесь безразмерный множитель $a^2/2\pi S$ не зависит от величины площади S, а интегрирование ведется по области S_1', подобной S' и соответствующей значению $a = 1$. Во внутреннем интеграле можно перейти к интегрированию по дуге; тогда формула (4) примет вид

$$Z = u\rho S\left[1 - (1-\beta^2)\frac{a^2}{2\pi S}\times\right.$$

$$\left.\times\iint_{S_1'}\oint_{C_1'}\frac{\exp\left[-ik'a\,(1+\beta\sin\theta)\,r_1(s_1')\right]}{(1+\beta\sin\theta)\,r_1(s_1')}\sqrt{1-\left(\frac{dr_1}{ds_1'}\right)^2}\,ds_1'\,dS_1'\right]. \qquad (5)$$

Перейдем к частному случаю прямоугольной пластины со сторонами a и b. Если взять за характеристический размер величину a, то $a^2/2\pi S = 1/2\pi n$, где $n = b/a$. Областью S_1' в формулах (4) и (5) будет прямоугольник со сторонами 1 и $n' = n/\sqrt{1-\beta^2}$. В обозначениях координат штрихи и индексы будем опускать.

Активная и реактивная части сопротивления равны

$$R = 1 - Y =$$

$$= 1 - \frac{1}{2\pi n'} \int_0^1 \int_0^{n'} \oint_C \frac{\cos[k'a(1+\beta\sin\theta)r(s)]}{(1+\beta\sin\theta)r(s)} \sqrt{1-\left(\frac{dr}{ds}\right)^2}\, ds\, dy\, dx,$$

$$X = \frac{1}{2\pi n'} \int_0^1 \int_0^{n'} \oint_C \frac{\sin[k'a(1+\beta\sin\theta)r(s)]}{(1+\beta\sin\theta)r(s)} \sqrt{1-\left(\frac{dr}{ds}\right)^2}\, ds\, dy\, dx.$$

На левой, правой, нижней и верхней сторонах $r(s)$ равно, соответственно:

$$\sqrt{s^2+x^2}, \quad \sqrt{s^2+(1-x)^2}, \quad \sqrt{s^2+y^2}, \quad \sqrt{s^2+(n'-y)^2};$$

для $\sin\theta$ имеем, соответственно:

$$-\frac{s}{r(s)}, \quad \frac{s}{r(s)}, \quad -\frac{y}{r(s)}, \quad \frac{n'-y}{r(s)}.$$

Отсюда

$$I = 2\pi n' X = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^{n'} \int_{-(n'-y)}^{y} \frac{\sin k'a(\sqrt{s^2+x^2}-\beta s)}{\sqrt{s^2+x^2}-\beta s} \frac{x}{\sqrt{s^2+x^2}}\, ds\, dy\, dx,$$

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^{n'} \int_{-y}^{(n'-y)} \frac{\sin k'a(\sqrt{s^2+(1-x)^2}+\beta s)}{\sqrt{s^2+(1-x)^2}+\beta s} \frac{1-x}{\sqrt{s^2+(1-x)^2}}\, ds\, dy\, dx,$$

$$I_3 = \int_0^1 \int_0^{n'} \int_{-x}^{(1-x)} \frac{\sin k'a(\sqrt{s^2+y^2}-\beta y)}{\sqrt{s^2+y^2}-\beta y} \frac{y}{\sqrt{s^2+y^2}}\, ds\, dy\, dx,$$

$$I_4 = \int_0^1 \int_0^{n'} \int_{-(1-x)}^{x} \frac{\sin k'a[\sqrt{s^2+(n'-y)^2}+\beta(n'-y)]}{\sqrt{s^2+(n'-y)^2}+\beta(n'-y)} \frac{n'-y}{\sqrt{s^2+(n'-y)^2}}\, ds\, dy\, dx.$$

Преобразуем первый интеграл

$$I_1 = \int_0^{n'} \int_0^{y} \int_0^{1} \frac{\sin k'a(\sqrt{s^2+x^2}-\beta s)}{\sqrt{s^2+x^2}-\beta s} \frac{x}{\sqrt{s^2+x^2}}\, dx\, ds\, dy +$$

$$+ \int_0^{n'} \int_0^{n'-y} \int_0^{1} \frac{\sin k'a(\sqrt{s^2+x^2}+\beta s)}{\sqrt{s^2+x^2}+\beta s} \frac{x}{\sqrt{s^2+x^2}}\, dx\, ds\, dy =$$

$$= \int_0^{n'} \int_0^{y} \int_{(1-\beta)s}^{\sqrt{s^2+1}-\beta s} \frac{\sin k'a\xi}{\xi}\, d\xi\, ds\, dy + \int_0^{n'} \int_0^{n'-y} \int_{(1+\beta)s}^{\sqrt{s^2+1}+\beta s} \frac{\sin k'a\xi}{\xi}\, d\xi\, ds\, dy.$$

В точности такое же выражение получается для I_2. Внутренние интегралы выражаются через интегральный синус

$$\mathrm{Si}\,\eta = \int_0^{\eta} \frac{\sin\xi}{\xi}\, d\xi;$$

$$I_1 + I_2 = 2\int_0^{n'}\int_0^{y} [\operatorname{Si} k'a(\sqrt{s^2+1} - \beta s) - \operatorname{Si} k'a(1-\beta)s]\,ds\,dy +$$

$$+ 2\int_0^{n'}\int_0^{n'-y} [\operatorname{Si} k'a(\sqrt{s^2+1} + \beta s) - \operatorname{Si} k'a(1+\beta)s]\,ds\,dy.$$

Для суммы $I_3 + I_4$ получаем

$$I_3 + I_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\int_0^1\left\{\int_0^x + \int_0^{1-x}\right\}[\operatorname{Si} k'a(\sqrt{s^2+n'^2} + \beta n') +$$

$$+ \operatorname{Si} k'a(\sqrt{s^2+n'^2} - \beta n') - 2\operatorname{Si} k'as]\,ds\,dx +$$

$$+ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\int_0^1\left\{\int_0^x + \int_0^{1-x}\right\}\int_{k'a(\sqrt{s^2+n'^2}-\beta n')}^{k'a(\sqrt{s^2+n'^2}+\beta n')}\frac{\sin\xi\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-(kas)^2}}\,ds\,dx.$$

Здесь внутренний интеграл является легко табулируемой функцией от s и ka:

$$T(s, ka) = \int_{q_-}^{q_+}\frac{\sin\xi\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-(kas)^2}},\quad q_\pm = \frac{ka}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\sqrt{s^2 + \frac{n^2}{1-\beta^2}} \pm \frac{n\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right).$$

Изменяя порядок интегрирования в двойных интегралах и производя интегрирование по переменному, от которого подинтегральное выражение не зависит, получим окончательно:

$$X = \frac{n}{\pi\sqrt{1-\beta^2}}\int_0^1\left[\operatorname{Si} p_+ + \operatorname{Si} p_- - \operatorname{Si}\frac{kans}{1+\beta} - \operatorname{Si}\frac{kans}{1-\beta}\right](1-s)\,ds +$$

$$+ \frac{1}{\pi n}\int_0^1\left[\operatorname{Si} q_+ + \operatorname{Si} q_- - 2\operatorname{Si}\frac{kas}{\sqrt{1-\beta^2}}\right](1-s)\,ds + \frac{\beta}{\pi n}\int_0^1 T(s, ka)(1-s)\,ds,$$

$$p_\pm = \frac{ka\,n}{1-\beta^2}\left(\sqrt{s^2+\frac{1-\beta^2}{n^2}} \pm \beta s\right),\quad q_\pm = \frac{ka}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\sqrt{s^2+\frac{n^2}{1-\beta^2}} \pm \frac{\beta n}{\sqrt{1-\beta^2}}\right),$$

$$T(s, ka) = \int_{q_-}^{q_+}\frac{\sin\xi\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-(kas)^2}}.$$

Выражение для Y получается в подобном виде, только вместо $\operatorname{Si}\eta$ входит интегральный косинус, а функция T заменяется на

$$D(s, ka) = \int_{q_-}^{q_+}\frac{\cos\xi\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-(kas)^2}}.$$

При $\beta = 0$ полученные формулы переходят в соответствующие выражения для пластины, излучающей в неподвижную среду ([3], [4]).

Приведем значения R и X, вычисленные по полученным формулам для квадрата при $\beta = V/u = 0{,}1$:

ka	$R(ka)$	$X(ka)$	ka	$R(ka)$	$X(ka)$
1	0,1498	0,4933	6	0,9852	0,1329
2	0,4682	0,6640	7	0,9329	0,1503
3	0,8783	0,6139	8	0,9470	0,1848
4	1,0669	0,4042	9	0,9928	0,1819
5	1,0675	0,2111	10	1,0224	0,1439

В заключение автор выражает благодарность А. Н. Тихонову, советами которого он пользовался при выполнении работы.

Поступило
9 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. И. Блохинцев, Акустика неоднородной движущейся среды, 1946. [2] С. С. Войт, Прикладн. матем. и мех., **16**, в. 6 (1952). [3] Д. Н. Четаев, ДАН, **76**, № 6, 813 (1951). [4] Д. Н. Четаев, Прикладн. матем. и мех., **15**, в. 4, 439 (1951).