Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 3

АСТРОНОМИЯ

В. В. РАДЗИЕВСКИЙ

ФОТОГРАВИТАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ ПРИ АНИЗОТРОПНОМ ИЗЛУЧЕНИИ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 24 III 1953)

Как известно, силы светового отталкивания и гравитационного притяжения, действующие между двумя покоящимися сферическими изотропно излучающими телами, являются с точностью до постоянного коэффициента идентичными функциями их положения. Вызываемое относительным движением тел некоторое нарушение коллинеарности этих сил (эффект аберрации) оказывается настолько незначительным, что на космогонически непродолжительных отрезках времени фотогравитационное поле движущихся тел можно считать квази-консервативным. Только изменением физических констант, характеризующих взаимодействующие тела, может быть вызвано серьезное нарушение консервативности такого поля.

Картина, однако, резко меняется, когда источником фотогравитационного поля является анизотропно излучающее тело. В настоящей работе мы исследуем тот частный случай этой проблемы, когда центральным телом является звезда, интенсивность излучения которой в направлении, составляющем угол ϑ с плоскостью ее экватора, увеличивается с увеличением ϑ, что может быть обусловлено тремя причинами: сплюснутостью звезды, уменьшением ее поверхностной температуры от полюсов к экватору и концентрацией экранирующей диффузной материи в плоскости последнего. В этом случае, если второе тело шарообразно, имеет радиус a и находится на расстоянии $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ от центра звезды, плоскость экватора которой мы принимаем за плоскость XY, то количество лучистой энергии E, падающей в единицу времени на второе тело, может быть представлено рядом Фурье

$$E=\frac{\pi a^2}{R^2}\sum_0^\infty A_{2n}\cos 2n\vartheta \tag{1}$$

или рядом

$$E=\frac{\pi a^2}{R^2}\sum_0^\infty B_{2n}\sin^{2n}\vartheta=\frac{\pi a^2}{R^2}\sum_0^\infty B_{2n}\left(\frac{z}{R}\right)^{2n}, \tag{2}$$

где коэффициенты B_{2n} однозначным образом определяются через коэффициенты ряда Фурье A_{2n}.

Результирующая сила F, с которой звезда воздействует на второе тело, очевидно, будет

$$F=-F_g+F_p=-\frac{GMm}{R^2}+\frac{E}{c}, \tag{3}$$

где G — гравитационная постоянная, c — скорость света, M и m — массы звезды и второго тела.

Так как $\operatorname{rot} \mathbf{F}_g = 0$, то на основании (3) и (2), учитывая коллинеарность векторов $\mathbf{F}_g$ и $\mathbf{F}_p$, находим:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{F}_p = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_{px} & F_{py} & F_{pz} \end{vmatrix} = \frac{\pi a^2}{c} \sum_0^\infty 2nB_{2n} \frac{z^{2n-1}}{R^{2n+3}} (x\mathbf{j} - y\mathbf{i}). \tag{4}$$

Как известно, условием консервативности поля является равенство $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$. Таким образом, на основании (4) мы приходим к выводу, что движение второго тела в рассматриваемом случае будет консервативным только при условии, что оно происходит либо в плоскости экватора центрального тела ($z = 0$), либо вдоль его полярной оси ($x = y = 0$). Во всех остальных случаях движение второго тела должно сопровождаться непрерывным изменением его полной энергии. Позже мы увидим, что это обстоятельство делает принципиально возможным переход второго тела с разомкнутой на замкнутую орбиту без передачи энергии третьему телу и без изменения физических характеристик взаимодействующих тел.

Учитывая наше исходное предположение о центральности силы, можно утверждать, что тело m будет двигаться по плоской кривой с постоянным моментом количества движения

$$C = R^2 \frac{d\varphi}{dt}, \tag{5}$$

где φ — полярный угол тела m, который мы будем отсчитывать в плоскости его орбиты от линии пересечения последней с плоскостью экватора центрального тела. Если обозначить через i угол между этими плоскостями, то $\sin\vartheta = \sin i \sin\varphi$, и дифференциальные уравнения движения тела m в плоскости XY, совмещенной теперь уже с плоскостью его орбиты, могут быть записаны так:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{x}{R^3}\left[GM - \frac{3}{4ca\delta}\sum_0^\infty B_{2n} \sin^{2n} i \sin^{2n}\varphi\right], \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{y}{R^3}\left[GM - \frac{3}{4ca\delta}\sum_0^\infty B_{2n} \sin^{2n} i \sin^{2n}\varphi\right], \end{aligned} \tag{6}$$

где δ — плотность второго тела.

Умножая первое из уравнений (6) на $2dx/dt$, а второе на $2dy/dt$, складывая полученные произведения и преобразуя результат при помощи (5), находим

$$\frac{d^2(1/R)}{d\varphi^2} + \frac{1}{R} = \frac{1}{C^2}\left[GM - \frac{3}{4ca\delta}\sum_0^\infty B_{2n} \sin^{2n} i \sin^{2n}\varphi\right]. \tag{7}$$

Уравнение (7) легко интегрируется методом вариации произвольных постоянных. Его общее решение имеет вид

$$R = \frac{C^2/GM}{1 - e_1\cos(\varphi+\varepsilon) - \sum_0^\infty e_{2n}\cos^{2n}\varphi}, \tag{8}$$

где e_1 и ε — постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями движения, а e_{2n} — коэффициенты, выражаемые однозначным образом через коэффициенты ряда Фурье и другие известные физические константы.

Рассмотрим частный случай, когда вид функции $E(\vartheta)$ позволяет ограничиться двумя первыми членами ряда (1). В этом случае

$$R = \frac{p}{1 - e_1 \cos(\varphi + \varepsilon) - e_2 \cos^2 \varphi}, \tag{9}$$

где

$$p = \frac{2ca\delta C^2}{2ca\delta GM - {}^3/_2 (A_0 + A_2) + A_2 \sin^2 i}, \tag{10}$$

$$e_2 = -\frac{A_2 \sin^2 i}{2ca\delta GM - {}^3/_2 (A_0 + A_2) + A_2 \sin^2 i}. \tag{11}$$

Используя (5) и (9), нетрудно получить выражение для скорости движения второго тела

$$v^2 = \frac{C^2}{R^2} + \frac{C^2}{p^2} [e_1 \sin(\varphi + \varepsilon) + e_2 \sin 2\varphi]. \tag{12}$$

Уравнения (9) и (12) определяют произвольные постоянные e_1 и ε при известном значении e_2 и заданных значениях φ_0, R_0 и v_0 (а следовательно, и C) в какой-либо момент t_0.

Как видно из (9), орбита второго тела будет кривой четвертого порядка, достаточным, хотя и не необходимым, условием разомкнутости которой является одно из неравенств:

$$|e_1| \geqslant 1 \text{ или } e_2 \geqslant 1,$$

а условием замкнутости — неравенство

$$|e_1| + |e_2| < 1.$$

Для иллюстрации сказанного рассмотрим числовой (в системе CGS) пример. Пусть центральным телом будет звезда с массой $M = 5 \cdot 10^{33}$, излучающая в плоскости экватора в 20 раз, а в направлении оси вращения в 40 раз интенсивнее Солнца ($A_0 = 9 \cdot 10^{33}$, $A_2 = -3 \cdot 10^{33}$). Поместим второе тело с $a\delta = 5 \cdot 10^{-4}$ в точку $\varphi_0 = 0$, $R_0 = 3 \cdot 10^{14}$, и будем сообщать ему скорость $v_0 = 3{,}3 \cdot 10^5$ в направлении, перпендикулярном к $\mathbf{R}$ (так, что $C = 10^{20}$ и $\varepsilon = 0$), но под разными углами i к плоскости экватора звезды. При $i = 0$ эта скорость будет соответствовать круговому движению (рис. 1). С увеличением i орбита вытягивается и при $i = i_{\text{критич}} = 16°46'$ размыкается. При тех же условиях, но с иным значением $a\delta$ разрыв орбиты будет происходить при тем большем угле i, чем больше величина $a\delta$.

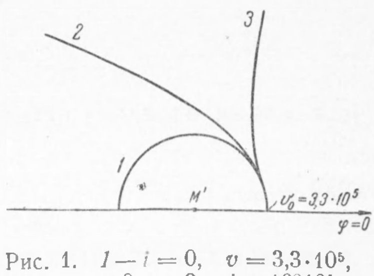

Рис. 1. $1 - i = 0$, $v = 3{,}3 \cdot 10^5$, $e_1 = e_2 = 0$; $2 - i = 16°46'$, $v_\infty = 0$, $e_1 = -{}^2/_3$, $e_2 = {}^1/_3$; $3 - i = 45°$, $v_\infty = 8 \cdot 10^5$, $e_1 = 6$, $e_2 = -3$

Как следует из результатов настоящей работы, всякие столкновения космических пылинок друг с другом, а также с корпускулами космической радиации, приводящие к изменению угла i, в среднем должны благоприятствовать либо захвату (при уменьшении i), либо выбросу (при увеличении i) этих частиц звездою, что в свою очередь должно сопровождаться накоплением пылевой материи в плоскости ее экватора. Экранируя экваториальное излучение звезды, захваченная материя будет увеличивать фактор анизотропности ее излучения и тем самым способствовать повышению интенсивности накопления.

Если облако космической пыли, благодаря наличию внутренних связей, движется как целое по разомкнутой орбите, т. е. в среднем для него $i > i_{\text{критич}}$, то для значительной доли отдельных частиц может быть $i < i_{\text{критич}}$ либо за счет сложения их пекулярных скоростей с общей скоростью движения, либо вследствие того, что $a\delta$ у них меньше среднего значения. При приближении облака к звезде внутренние связи ослабевают, и оно распадается, причем все частицы, для которых $i < i_{\text{критич}}$, захватываются звездою.

Захватом Солнцем космической пыли преимущественно в плоскости его экватора легко объясняется, почему современное вращение Солнца, вызванное, согласно теории О. Ю. Шмидта, выпавшей на него пылевой материей, почти не несет на себе следов своего прошлого вращения.

В заключение автор выражает благодарность акад. О. Ю. Шмидту и Б. Ю. Левину за критическое обсуждение настоящей работы.

Ярославский государственный педагогический институт им. К. Д. Ушинского

Поступило 24 III 1953