Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. М. НАГОРНЫЙ

К УСИЛЕНИЮ ТЕОРЕМЫ ПРИВЕДЕНИЯ ТЕОРИИ АЛГОРИФМОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 18 III 1953)

1. В статье ([1]) А. А. Марковым в качестве следствия из теоремы о переводе алгорифма была получена следующая теорема приведения. *Всякий нормальный алгорифм над алфавитом* А *эквивалентен относительно* А *некоторому нормальному алгорифму в алфавите* А $\cup$ $\{\alpha, \beta\}$, *где* α *и* β — *буквы, не принадлежащие* А.

Эта теорема дает возможность приводить любой нормальный алгорифм над алфавитом А к эквивалентному относительно А нормальному алгорифму в двухбуквенном расширении алфавита А.

2. Оказывается, что теорема приведения может быть доказана в следующей усиленной формулировке.

Пусть α — *буква, не принадлежащая* А. *Тогда всякий нормальный алгорифм* $\mathfrak{A}$ *над алфавитом* А *эквивалентен относительно* А *некоторому нормальному алгорифму* $\mathfrak{B}$ *в* А $\cup$ $\{\alpha\}$*.

Действительно, пусть $\mathfrak{A}$ — нормальный алгорифм в А $\cup$ Б, А $=\{a_1, \ldots, a_n\}$, Б $= \{b_1, \ldots, b_m\}$ и А не имеет общих букв с Б. Пусть α — буква, не принадлежащая А. Операцию перевода алфавита А $\cup$ Б в алфавит А $\cup$ $\{\alpha\}$ определим следующим образом:

$$[a_1^\tau = \alpha a_1^4 \alpha,$$
$$[a_i^\tau = \alpha a_i \alpha, \qquad i = 2, 3, \ldots, n,$$
$$[b_i^\tau = \alpha a_1^{i+4} \alpha, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Дополнительно будем считать

$$[\Lambda^\tau = \Lambda,$$
$$[\cdot^\tau = \alpha a_1 \alpha.$$

Операцию перевода слов в алфавите $A \cup$ Б $\cup \{\cdot\}$ определим обычным образом:

$$[\eta_1 \ldots \eta_s^\tau = [\eta_1^\tau \ldots [\eta_s^\tau \quad (\eta_1, \ldots, \eta_s \in \text{А} \cup \text{Б} \cup \{\cdot\}).$$

Пусть $F = P \rightarrow \gamma Q$ — формула подстановки в алфавите А $\cup$ Б (здесь $\gamma = \cdot$ или $\gamma = \Lambda$). Перевод F определим следующим образом:

$$[F^\tau = \begin{cases} [P^\tau \rightarrow [\gamma Q^\tau, & \text{если } P \neq \Lambda; \\ \alpha a_1^2 \alpha \rightarrow \alpha a_1^2 \alpha\, [\gamma Q^\tau, & \text{если } P = \Lambda. \end{cases}$$

---

* Относительно $\mathfrak{B}$ можно утверждать также следующее: всякий раз, когда он применим к слову P в А, $\mathfrak{B}(P)$ также есть слово в А.

Пусть

$$\left\{\begin{array}{l} F_1 \\ \vdots \\ F_k \end{array}\right.$$

схема алгорифма $\mathfrak{A}$. Зададим в алфавите $\text{А} \cup \{\alpha\}$ нормальный алгорифм $\mathfrak{B}$, определяемый следующей сокращенно записанной схемой:

$$\left\{\begin{array}{ll}
\alpha a_1^3\alpha\eta \to [\eta^\tau\alpha a_1^3\alpha & (\eta \in \text{А}) \\
\alpha a_1^3\alpha \to \alpha a_1\alpha & \\
\alpha a_1\alpha\,[\eta^\tau \to [\eta^\tau\alpha a_1\alpha & (\eta \in \text{А} \cup \text{Б}) \\
[\eta^\tau\alpha a_1\alpha\alpha a_1\alpha \to \alpha a_1\alpha\alpha a_1\alpha\eta & (\eta \in \text{А}) \\
[\eta^\tau\alpha a_1\alpha\alpha a_1\alpha \to [\eta^\tau\alpha a_1\alpha\alpha a_1\alpha & (\eta \in \text{Б}) \\
\alpha a_1^2\alpha\alpha a_1\alpha\alpha a_1\alpha \to \cdot & \\
[F_1^\tau & \\
\vdots & \\
[F_k^\tau & \\
\alpha a_1^2\alpha \to \alpha a_1^2\alpha\alpha a_1\alpha & \\
\to \alpha a_1^2\alpha\alpha a_1^3\alpha. &
\end{array}\right.$$

Нетрудно показать, что алгорифм $\mathfrak{B}$ эквивалентен $\mathfrak{A}$ относительно А.

3. Естественно спросить, не допускает ли теорема приведения дальнейшего усиления в этом же направлении, т. е. не является ли верным и следующее утверждение: «всякий нормальный алгорифм над алфавитом А эквивалентен относительно А некоторому нормальному алгорифму в А». Оказывается, однако, что на этот вопрос следует дать отрицательный ответ. Именно, справедливо следующее предложение:

Для всякого алфавита А *может быть указан такой нормальный алгорифм* $\mathfrak{A}$ *над* А, *что невозможен нормальный алгорифм в* А, *эквивалентный* $\mathfrak{A}$ *относительно* А.

В качестве такого алгорифма можно взять, например, удваивающий алгорифм над алфавитом А, т. е. такой нормальный алгорифм $\mathfrak{A}$ над А, что

$$\mathfrak{A}(P) = PP \quad (P \text{ — слово в А}).$$

Сформулированными двумя теоремами решается вопрос о приведении нормальных алгорифмов.

Автор глубоко благодарен проф. А. А. Маркову за исключительное внимание, проявленное к настоящей работе.

Поступило
11 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Марков, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 38 (1951).