Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 3

МАТЕМАТИКА

Ю. Т. МЕДВЕДЕВ

ДВА ПРИЗНАКА КОМПАКТНОСТИ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 III 1953)

В настоящей заметке устанавливаются два предложения. Теорема 1 обобщает известный критерий Арцела компактности в пространстве непрерывных функций; в теореме 2 даются условия компактности семейства измеримых функций в смысле сходимости по мере.

§ 1. Пусть X и Y — абстрактные множества, M — компакт с метрикой r. Совокупность всех функций $f(x)$ — однозначных отображений X в M — превращается в метрическое пространство $M[X]$, если ввести расстояние по формуле

$$\rho(f_1, f_2) = \sup_{x \in X} r(f_1(x), f_2(x)).$$

Как легко видеть, пространство $M[X]$ полно. Аналогично вводим в рассмотрение пространство $M[Y]$, состоящее из отображений $g(y)$ множества Y в M.

Пусть теперь $\varphi(x, y)$ — однозначная функция со значениями из M, определенная при $x \in X$, $y \in Y$.

Равенства

$$\varphi(x, y) = f_y(x), \tag{1}$$

$$\varphi(x, y) = g_x(y) \tag{2}$$

определяют два семейства функций: $F = \{f_y(x)\} \subset M[X]$ и $G = \{g_x(y)\} \subset M[Y]$. Функции первого семейства получаются из $\varphi(x, y)$ фиксированием произвольной точки $y \in Y$, функции второго семейства — фиксированием произвольной точки $x \in X$.

Теорема 1. *Семейства F и G либо оба компактны, либо оба не компактны (в соответствующих пространствах $M[X]$ и $M[Y]$).*

Доказательство. Покажем, что из компактности F следует компактность G. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Разобьем компакт M на конечное число множеств $M_1, \ldots, M_n$ диаметра $\leqslant \varepsilon/3$. Если семейство F компактно, то оно имеет конечную $\frac{\varepsilon}{3}$-сеть. Пусть эта $\frac{\varepsilon}{3}$-сеть состоит из функций $f_{y_1}(x), \ldots, f_{y_p}(x)$. Обозначим через X_{ik} множество тех $x \in X$, для которых $f_{y_i}(x) \in M_k$. Всевозможные пересечения $\bigcap_{i=1}^{p} X_{ik_i}$ множеств X_{ik} образуют разбиение X на конечное число l таких множеств X_j, что $r(f_{y_i}(x'), f_{y_i}(x'')) \leqslant \varepsilon/3$ $(x', x'' \in X_j;\ j = 1, 2, \ldots, l;\ i = 1, 2, \ldots, p)$; тогда имеем $r(f_y(x'), f_y(x'')) \leqslant \varepsilon$ $(x', x'' \in X_j;\ j = 1, 2, \ldots, l;\ y \in Y)$. Отсюда, в силу (1) и (2), $\sup_{y \in Y} r(g_{x'}(y), g_{x''}(y)) \leqslant \varepsilon$ $(x', x'' \in X_j;\ j = 1, 2, \ldots, l)$.

Таким образом, семейство G разбивается на конечное число множеств G_j диаметра $\leqslant \varepsilon$ (достаточно положить $G_j = \{g_x(y)\}$, где $x \in X_j$).

Значит, G вполне ограничено и, следовательно, компактно. Так как семейства F и G равноправны, то теорема доказана.

Покажем, как теорема Арцела (в одной из возможных общих формулировок) вытекает из теоремы 1.

Теорема Арцела. *Семейство F равностепенно непрерывных отображений $f(x)$ вполне ограниченного множества X метрического пространства в компакт M компактно в смысле равномерной сходимости.*

Положим $Y = F$, $\varphi(x, y) = \varphi(x, f) = f(x)$. В условиях теоремы Арцела при любом $\varepsilon > 0$ множество X можно разбить на конечное число частей $X_1, \ldots, X_l$, на каждой из которых колебание любой функции $f(x) \in F$ меньше чем ε. Это означает, что множество G можно разбить на конечное число подмножеств диаметра $\leqslant \varepsilon$. Следовательно, семейство G компактно. Но тогда, по теореме 1, компактно и F.

§ 2. В этом параграфе мы будем рассматривать вещественные функции $f(x)$, определенные на измеримом множестве X, $\operatorname{mes} X < \infty$, лежащем в евклидовом пространстве.

Теорема 2. *Для того чтобы семейство $F = \{f(x)\}$ измеримых почти везде конечных функций было компактно в смысле сходимости по мере, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ каждой функции $f(x) \in F$ соответствовала такая непрерывная функция $f_\varepsilon(x)$, что*:

1) $\operatorname{mes} E(f(x) \neq f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$;

2) *семейство $F_\varepsilon = \{f_\varepsilon(x)\}$ компактно в смысле равномерной сходимости.*

Лемма 1. *Если семейство F компактно, то для любого $\varepsilon > 0$ каждой функции $f(x) \in F$ можно поставить в соответствие множество $E_\varepsilon(f) \subset X$ такое, что*:

а) $\operatorname{mes} E_\varepsilon(f) > \operatorname{mes} X - \varepsilon$;

б) *функции семейства F, рассматриваемые каждая только на соответствующем ей множестве $E_\varepsilon(f)$, равномерно ограничены и равностепенно непрерывны.*

Пусть F компактно. Легко видеть, что лемма справедлива, если справедливо следующее утверждение: для каждой пары положительных чисел ε и η можно указать такие положительные числа δ и H и систему множеств $E_{\varepsilon, \eta}(f)$, что:

α) $\operatorname{mes} E_{\varepsilon, \eta}(f) > \operatorname{mes} X - \varepsilon$;

β) $|f(x') - f(x'')| < \eta$ при $\rho(x', x'') < \delta$, $f(x) \in F$ и $x', x'' \in E_{\varepsilon, \eta}(f)$

γ) $|f(x)| < H < \infty$ при $f(x) \in F$, $x \in E_{\varepsilon, \eta}(f)$.

Предположим, что сформулированное предложение не верно. Мы укажем тогда последовательность функций $f_n(x) \in F$, удовлетворяющих условию $\operatorname{mes} E(|f_i(x) - f_k(x)| > \eta_0 / 3) > \varepsilon_0 / 2$ $(i \neq k)$, где ε_0, η_0 — положительные числа, для которых нельзя построить систему множеств $E_{\varepsilon_0, \eta_0}(f)$, удовлетворяющую условиям α), β) и γ). Последовательность $f_n(x)$ строим по индукции. Выбираем $f_1(x) \in F$ произвольно; пусть $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ уже определены. Если всякая функция $f(x) \in F$ такова, что $\operatorname{mes} E(|f(x) - f_i(x)| > \eta_0 / 3) \leqslant \varepsilon_0 / 2$ хотя бы при одном i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то обозначим через $E^{(n)}$ ограниченное замкнутое множество меры большей, чем $\operatorname{mes} X - \varepsilon_0 / 2$, на котором функции $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ все непрерывны (такое множество существует по теореме Лузина). Простой подсчет убеждает нас в том, что система множеств $E_{\varepsilon_0, \eta_0}(f) = E^{(n)} \cap E(|f(x) - f_i(x)| \leqslant \eta_0 / 3)$ удовлетворяет условиям α), β) и γ) при $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\eta = \eta_0$, вопреки предположению. Значит, можно в F выбрать функцию $f_{n+1}(x)$. Итак, упомянутая последовательность функций $f_n(x)$ может быть построена; она, очевидно, не компактна. Но этого не может быть ввиду компактности F. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть задано семейство Φ равностепенно непрерывных и равномерно ограниченных вещественных функций $\varphi(x)$, каждая из которых определена на соответствующем ей множестве $E(\varphi)$ метрического пространства R. Тогда функции семейства Φ можно продолжить с сохранением равностепенной непрерывности и равномерной ограниченности на все R.*

Доказательство. Множества $E(\varphi)$ можно считать замкнутыми. В самом деле, если продолжить по непрерывности функции $\varphi(x)$ на замыкания им соответствующих множеств $E(\varphi)$, то равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность сохранятся.

Для доказательства леммы 2 (в предположении замкнутости $E(\varphi)$) воспользуемся построением, аналогичным тому, которое применяется при непрерывном продолжении одной функции. Пусть в условиях леммы $|\varphi(x)| < K < \infty$ $(x \in E(\varphi),\ \varphi(x) \in \Phi)$ и пусть $E'_\varphi = E(\varphi(x) \geqslant K/3)$, $E''_\varphi = E(\varphi(x) \leqslant -K/3)$.

Определим функции $\varphi_1(x)$ на $E'_\varphi \cup E''_\varphi$ равенством $\varphi_1(x) = \frac{K}{3} \operatorname{sign} \varphi(x)$. Функции $\varphi_1(x)$ $(\varphi(x) \in \Phi)$, очевидно, равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Поставим в соответствие каждой функции $\varphi(x) \in \Phi$ функцию $\overline{\varphi}_1(x)$, определенную на всем R, по следующему правилу. Если $E'_\varphi \cup E''_\varphi = 0$, то положим $\overline{\varphi}_1(x) = 0$. Если функция $\varphi_1(x)$ принимает только одно значение, то положим $\overline{\varphi}_1(x)$ тождественно равной этому же значению. Если функция $\varphi_1(x)$ принимает два значения, то положим $\overline{\varphi}_1(x) = \frac{K}{3} \frac{\rho(x, E''_\varphi) - \rho(x, E'_\varphi)}{\rho(x, E''_\varphi) + \rho(x, E'_\varphi)}$.

Равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность функции $\overline{\varphi}_1(x)$ доказывается без труда: нужно заметить только, что знаменатель в последней формуле ограничен снизу положительным числом h, не зависящим от $\varphi(x) \in \Phi$, и что справедливо неравенство $|\rho(x', M) - \rho(x'', M)| \leqslant \rho(x', x'')$, где x', $x'' \in R$, а M — произвольное подмножество R. Из конструкции непосредственно следует, что $|\varphi(x) - \overline{\varphi}_1(x)| \leqslant {}^2/_3 K$ $\quad (\varphi(x) \in \Phi,\ x \in E(\varphi))$.

С функциями семейства $\{\varphi(x) - \overline{\varphi}_1(x)\}$ поступаем так же, как и с функциями семейства Φ: аппроксимируем их функциями $\overline{\varphi}_2(x)$ так, что $|\varphi(x) - \overline{\varphi}_1(x) - \overline{\varphi}_2(x)| \leqslant \frac{2^2}{3^2} K$ $(\varphi(x) \in \Phi,\ x \in E(\varphi))$.

Аналогично строим функции $\overline{\varphi}_i(x)$ $(i = 3, 4, \ldots)$.

Рассмотрим функции $\overline{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\varphi}_i(x)$. Ряд в последнем равенстве сходится равномерно относительно $\varphi(x) \in \Phi$ и $x \in R$. Так как частные суммы $\sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi}_i(x)$ $(\varphi(x) \in \Phi)$ равномерно ограничены и при фиксированном n равностепенно непрерывны, то функции $\overline{\varphi}(x)$ $(\varphi(x) \in \Phi)$ также будут равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Утверждение леммы следует из того, что функции $\overline{\varphi}(x)$ являются продолжением соответствующих функций $\varphi(x)$ на все R.

Переходим к доказательству теоремы.

Необходимость. Если F компактно, то справедлива лемма 1. Мы можем считать, что все множество $E_\varepsilon(f)$, о которых идет речь в этой лемме, принадлежат некоторому шару S_{r_0} радиуса $r_0 < \infty$. Пусть $\varphi(x)$ — функция, определенная при $x \in E_\varepsilon(f)$ и совпадающая на

$E_\varepsilon(f) = E(\varphi)$ с $f(x)$. Воспользовавшись построением леммы 2, продолжим функции семейства $\Phi = \{\varphi(x)\}$ на все множество X.

Мы установим необходимость условий теоремы 2, если докажем компактность семейства функций $\bar{\varphi}(x)$ в смысле равномерной сходимости. (Заметим, что в случае, когда множество X ограничено, справедливость последнего обстоятельства следует немедленно из теоремы Арцела.)

Пусть S_r — шар радиуса r, концентричный с S_{r_0}, $S_r \supset S_{r_0}$; Q_r — множество точек $x \in X$, лежащих вне S_r. Колебание функции $\bar{\varphi}_i(x)$ на Q_r не превосходит $2 \sup\limits_{x \in Q_r} |\bar{\varphi}_i(x)|$. В силу построения $|\bar{\varphi}_i(x)| \leqslant \frac{K}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \frac{r_0}{r - r_0}$ при $x \in Q_r$ для всякой функции $\bar{\varphi}_i(x)$, отличной от тождественной постоянной. Отсюда, так как $\bar{\varphi}(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \bar{\varphi}_i(x)$, делаем следующий вывод: каждому $\eta > 0$ можно поставить в соответствие такое r, что колебание любой функции $\bar{\varphi}(x)$ на Q_r не превосходит η. Вспомним еще, что функции $\bar{\varphi}(x)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на всем X. Теперь заключение о компактности семейства функций $\bar{\varphi}(x)$ можно вывести, например, из теоремы 1 предыдущего параграфа.

Достаточность. Если условия теоремы 2 выполнены, то диагональным процессом из любой последовательности $\{f_n(x)\}$ $(f_n(x) \in F)$ можно выделить подпоследовательность $f_{n_i}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, обладающую следующим свойством: $\operatorname{mes} E\left(|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+l}}(x)| > \frac{1}{2^k}\right) < \frac{1}{2^k}$ $(k, l = 1, 2, \ldots)$.

Введем обозначения: $H_k = X \setminus E\left(|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+l}}(x)| > \frac{1}{2^k}\right)$, $D_i = \bigcap\limits_{i}^{\infty} H_k$, $S = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i$. Очевидно, справедливы неравенства $\operatorname{mes} H_k > \operatorname{mes} X - \frac{1}{2^k}$, $\operatorname{mes} D_i > \operatorname{mes} X - \frac{1}{2^{i-1}}$, $\operatorname{mes} S = \operatorname{mes} X$.

Для всякого $x \in S$ последовательность $f_{n_i}(x)$ сходится. Обозначим предельную функцию через $f(x)$. Пусть задано положительное число ε. По каждому $\eta > 0$ находим такое k_0, что при $k > k_0$ $\operatorname{mes} D_k > \operatorname{mes} X - \eta$, $\frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$. При этом $\operatorname{mes} E(|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+l}}(x)| > \varepsilon) > \eta$, $\operatorname{mes} E(|f_{n_k}(x) - f(x)| > \varepsilon) < \eta$. Последние неравенства означают, что последовательность $f_{n_i}(x)$ сходится по мере к $f(x)$.

Теорема 2 полностью доказана.

Замечание. Условия теоремы 2 необходимы и достаточны также для компактности семейства функций F в смысле сходимости почти везде (к почти везде конечной функции).

Автор признателен М. А. Красносельскому и А. Н. Колмогорову, чьи замечания были учтены при написании этой заметки.

Воронежский
государственный университет

Поступило
7 II 1953