Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 3

МАТЕМАТИКА

А. И. МАЛЬЦЕВ

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ СРАВНЕНИЯ МАТРИЦ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 26 III 1953)

Система всех квадратных матриц данного порядка n с элементами из данного поля F относительно действия матричного умножения является ассоциативной системой, обозначаемой далее через F_n. Множество F_n^r матриц из F_n, ранг которых не превосходит заданного числа r, будет ассоциативной подсистемой системы F_n. Пользуясь рассуждениями, аналогичными изложенным в заметке [1], мы указываем далее в явной форме все гомоморфизмы, допускаемые системами F_n^r. Гомоморфизмы F_n ранее рассматривались Н. Сиверцевой [2], доказавшей, что если при гомоморфном отображении F_n в ассоциативную систему с единицей в единицу отображается какая-либо особенная матрица, то все матрицы F_n отображаются в единицу.

Наша задача состоит в том, чтобы для матриц F_n^r найти все отношения сравнения, рефлексивные, симметричные, транзитивные и выдерживающие умножение как справа, так и слева на произвольную матрицу из F_n^r. Окончательный результат следующий.

Пусть μ — произвольное фиксированное число, $1 \leqslant \mu \leqslant r$; $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_{\mu-1}$ — неубывающая цепочка подгрупп мультипликативной группы поля F, а G_μ — какой-либо нормальный делитель группы всех неособенных матриц порядка $r-\mu+1$, содержащий $G_{\mu-1}$. Полагаем

$$A \equiv B(G_1, \ldots, G_\mu) \qquad (A,\ B \in F_n^r), \tag{1}$$

если выполняется одно из следующих условий: а) ранг $A \leqslant r-\mu$, ранг $B \leqslant r-\mu$; б) ранг $A = r-i+1$, $B = \lambda A$, $\lambda \in G_i$ $(\mu-1 \leqslant i \leqslant r)$; в) ранг $A =$ ранг $B = r-\mu+1$, $LA = LB$, $B = AU$, $U_0 \in G_\mu$, где U — некоторая матрица ранга $r-\mu+1$, L — пространство векторов-строк размерности n, U_0 — матрица преобразования, индуцированного преобразованием U в подпространстве LA (терминологию см. [3]).

Теорема. *Сравнения вида* (1) *рефлексивны, симметричны, транзитивны и выдерживают умножение как справа, так и слева на произвольную матрицу из F_n^r. Различные системы подгрупп $G_1, \ldots, G_\mu$ определяют различные сравнения, и каждое сравнение на F_n^r, обладающее указанными свойствами, имеет вид* (1) *при подходящих $G_1, \ldots, G_\mu$.*

Ввиду того, что нормальные делители группы неособенных матриц известны [4, 5], эта теорема дает явное перечисление конгруентностей (сравнений с указанными свойствами) на F_n^r.

Доказательство того, что отношения вида (1) действительно обладают требуемыми свойствами, не представляет затруднений и здесь может быть опущено. Доказательство же, что каждая конгруентность на F_n^r имеет вид (1), удобнее разбить на отдельные части. Дальнейшее опирается на следующие хорошо известные свойства матриц: для каждой матрицы A ранга r существуют такие матрицы того же ранга U, V, что $UA = AV = A$. Если $LA \supseteq LB$, то существует матрица X, для которой $B = XA$. Для разрешимости матричного уравнения $B = AY$ необходимо и достаточно, чтобы для любого вектора $x \in L$ из $xA = 0$ следовало $xB = 0$.

А. *Если для некоторой конгруентности на F_n^r какая-либо матрица A ранга s сравнима с матрицей B меньшего ранга, то все матрицы ранга $\leqslant s$ сравнимы друг с другом.*

Ищем такие неособенные матрицы S, T, чтобы $SAT = E_s \dotplus O_{n-s} = R$, где E_s — единичная, O_{n-s} — нулевая матрицы соответствующих порядков, а знак $\dotplus$ означает прямое сложение матриц (см. ([3])). Тогда $R^3 \equiv RSBTR$, т. е. $E_s \dotplus O_{n-s} \equiv B_s' \dotplus O_{n-s}$, где ранг B_s' меньше s. Умножая справа и слева последнюю конгруентность на подходящие матрицы $P_s \dotplus O_{n-s}$ и $P_s^{-1} \dotplus O_{n-s}$, получим сравнение вида $E_s \dotplus O_{n-s} \equiv B_{s-k}'' \dotplus N_k \dotplus O_{n-s}$, где N_k — нильпотентная матрица. Отсюда путем возведения в k-ю степень получим конгруентность $E_s \dotplus O_{n-s} \equiv B_{s-k}''' \dotplus O_{n-s+k}$, умножая которую справа и слева на матрицу $E_{s-k} \dotplus O_{n-s+k}$ и сравнивая с данной, получим $E_s \dotplus O_{n-s} \equiv E_{s-k} \dotplus O_k \dotplus O_{n-s}$. Наконец, преобразуя обе части последней конгруентности с помощью матрицы вида $Q_s \dotplus O_{n-s}$ (Q_s — неособенная, порядка s), можно в слагаемом $E_{s-k} \dotplus Q_k$ правой части добиться любого распределения нулей и единиц на главной диагонали, после чего путем почленного перемножения полученных конгруентностей придем к сравнению $E_s \dotplus O_{n-s} \equiv O_n$. Для любой матрицы C ранга r существуют неособенные матрицы S, T такие, что $C = S(E_s \dotplus O_{n-s})T$. Умножая это равенство слева и справа на матрицы U, V ранга r, удовлетворяющие условию $UCV = C$, получим $C = S_0(E_s \dotplus O_{n-s})T_0$, где S_0, T_0 имеют ранг r. Из сравнения $E_s \dotplus O_{n-s} \equiv O_n$ теперь следует $C \equiv 0$, что и требовалось.

Б. *Если в F_n^r матрицы A, B конгруентны, но $LA \neq LB$, то $A \equiv 0$.*

Для LB и L, очевидно, существуют прямые разложения $LB = (LA \cap LB) \dotplus M$ и $L = LA \dotplus (M \dotplus N)$. Обозначая через P проектирование L на LA, соответствующее указанному прямому разложению, будем иметь: $A = AP$, ранг BP меньше ранга A, $AP \equiv PB$. В силу А это дает $A \equiv 0$.

В. *Если в F_n^r $A \equiv B$ и для некоторого вектора x $xA \equiv 0$, $xB \not\equiv 0$, то $A \equiv 0$.*

Согласно А, можно считать, что ранги A и B равны одному и тому же числу s. Обозначая через M совокупность векторов, переводящихся преобразованием B в нуль, найдем для L прямое разложение $L = M \dotplus N$, $x \in N$. Так как для проектирования P пространства L на N, отвечающего этому разложению, при любом $z \in L$ из $zP = 0$ следует $zB = 0$, то $P = BC$, $AC \equiv P$ ($C \in F_n^r$), откуда $PAC \equiv P$. Но ранг PAC меньше s, поскольку PAC переводит в нуль не только M, но и вектор x, в M не лежащий. Поэтому $P \equiv 0$ и, следовательно, $A \equiv 0$.

Г. *Если $B \equiv BU_0$, где U_0 — неособенное линейное преобразование пространства LB, ранг B равен рангу A и T — линейное отображение LB на LA, то $A \equiv A \cdot T^{-1}U_0T$.*

Распространяя T до линейного отображения L на себя, будем иметь $LB = LAT^{-1}$. Поэтому найдется такая матрица V, что $AT^{-1} = VB$. Но $VB \equiv VBU_0$, т. е. $AT^{-1} \equiv AT^{-1}U_0$, откуда указанным способом следует $A \equiv A \cdot T^{-1}U_0T$.

Пусть теперь задана какая-либо конгруентность на F_n^r. Обозначим через $r-\mu+1$ наинизший ранг преобразований, не конгруентных нулю. Для каждого заданного i, $1 \leqslant i \leqslant \mu$, фиксируем какое-либо преобразование A ранга $r-i+1$ и в подпространстве LA выбираем определенный базис. Согласно Б и В, если $A \equiv B$, то $LA = LB$, $B = AU_0$, где U_0 — однозначно определенное неособенное преобразование подпространства LA. Совокупность матриц U_0, отвечающих всевозможным преобразованиям B, сравнимым с A, обозначим G_i. Если $U_0, V_0 \in G_i$, то $A \equiv AU_0$, $A \equiv AV_0$, откуда, согласно Г, имеем $A \equiv AU_0V_0^{-1}$, т. е. $U_0V_0^{-1} \in G_i$. Следовательно, G_i — группа. Из Г следует также, что если $A \equiv AU_0$, X_0 — линейное отображение LA на себя, то $A \equiv A \cdot X_0^{-1}U_0X_0$, т. е. $X_0^{-1}U_0X_0 \in G_i$. Поэтому G_i — нормальный делитель группы всех неособенных матриц порядка $r-i+1$. Наконец, если B — произвольное преобразование ранга $r-i+1$ и $B \equiv BU_0$, где U_0 — неособенное линейное преобразование пространства LB, то, обозначая через T линейное отображение LB на LA, получим, согласно Г, $A \equiv A \cdot T^{-1}U_0T$, т. е. матрица U_0 принадлежит G_i.

Д. *Если скалярная матрица* λE_{r-i+1} *входит в* G_i, *то* λE_{r-i} *принадлежит* G_{i+1}.

По условию, $\lambda(E_{r-i+1} + O_{n-r+i-1}) \equiv E_{r-i+1} + O_{n-r+i-1}$. Умножая эту конгруентность на $E_{r-i} + O_{n-r+i}$, получим $\lambda(E_{r-i} + O_{n-r+i}) = E_{r-i} + O_{n-r+i}$ или $\lambda E_{r-i} \in G_{i+1}$.

Е. *Нескалярные матрицы может содержать лишь группа* G_μ.

В самом деле, пусть A — преобразование ранга $r-i+1$, $1 \leqslant i \leqslant \mu$, $A \equiv AU_0$ и U_0 не скалярное. Если бы все $(r-i)$-мерные подпространства в LA были инвариантны относительно U_0, то инвариантными относительно U_0 были бы и все одномерные подпространства, что возможно лишь для скалярных преобразований. Поэтому в LA найдется $(r-i)$-мерное подпространство M, для которого $MU_0 \neq M$. Обозначим через N прообраз M в L относительно A и рассмотрим какое-либо проектирование P пространства L на N. Из $LPA = NA = M$ следует, что ранг PA равен $r-i$. В то же время $PA \equiv PAU_0$, $LPA \neq LPAU_0$. Ввиду А, Б отсюда следует, что все преобразования ранга $\leqslant r-i$ конгруентны нулю, т. е. $r-i \leqslant r-\mu$, $i=\mu$.

Из предложений А—Е основная теорема следует непосредственно.

Поступило
14 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Мальцев, Матем. сборн., 31, (73) : 1 (1952). [2] Н. Сиверцева, там же, 24 (66) : 1 (1949). [3] А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры, 1948. [4] L. E. Dickson, Linear Groups, Leipzig, 1901. [5] B. L. v. d. Waerden, Gruppen von linearen Transformationen, Berlin, 1935.