Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 3

МАТЕМАТИКА

В. И. БУРДИНА

КРИТЕРИЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-го ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 20 III 1953)

1. Рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= p_{11}(t)\,u + p_{12}v; \\ \frac{dv}{dt} &= p_{21}(t)\,u + p_{22}v; \end{aligned} \tag{1}$$

$p_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$, — периодические функции периода ω.

Записываем (1) в виде следующего векторного уравнения:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = I\mathscr{H}\mathbf{x}, \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathscr{P}(t)\,\mathbf{x}, \tag{1'}$$

где $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathscr{H} = \begin{pmatrix} -p_{21} & -p_{22} \\ p_{11} & p_{12} \end{pmatrix}$; $\mathscr{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$.

Подстановка

$$\mathbf{y} = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{spur}\mathscr{P}(\tau)\,d\tau\right)\mathbf{x}, \tag{2}$$

где $\operatorname{spur}\mathscr{P}(\tau) = p_{11}(\tau) + p_{22}(\tau)$, переводит (1′) в систему

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = P(t)\,\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\operatorname{spur} P(t) \equiv 0, \tag{4}$$

представимую в форме Гамильтона

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q}, \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial p} \end{aligned} \tag{3'}$$

с функцией $H(p, q)$ — квадратической формой от p, q:

$$2H(p, q) = h_{11}p^2 + 2h_{12}pq + h_{22}q^2,$$

матрица ее коэффициентов $H = \| h_{ij} \|$ определяется по $\mathscr{H}$ из (1′) равенством

$$H = {}^1/_2(\mathscr{H} + \mathscr{H}^*), \tag{5}$$

где $\mathscr{H}^*$ — транспонированная к $\mathscr{H}$ матрица.

2. Согласно теореме А. М. Ляпунова [1] о приводимости системы уравнений с периодическими коэффициентами, матрицу $Y(t)$ фундаментальной системы решений (3) можно представить в форме

$$Y(t) = D(t) e^{At}, \quad Y(0) = E, \tag{6}$$

где $D(t)$ — действительная периодическая матрица периода, равного, вообще говоря, 2ω; A — некоторая постоянная также действительная матрица; E — единичная матрица.

Из соотношений $Y(2\omega) = Y^2(\omega)$ и $Y(2\omega) = e^{A2\omega} = (e^{A\omega})^2$ следует, что

$$D(\omega) = \pm E. \tag{7}$$

Из (4) следует

$$\operatorname{spur} A = 0.$$

Последнее означает, что при существовании у системы (3) неограниченных решений матрица A может иметь только одну из следующих канонических форм:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

3. Пусть

$$\frac{1}{\omega} \int_0^\omega \operatorname{spur} \mathscr{P}(\tau)\, d\tau = 2\mu_0; \tag{8}$$

подстановка (2) может быть записана в виде

$$\mathbf{x} = e^{\mu_0 t} e^{r(t)} \mathbf{y},$$

где $r(t)$ — некоторая периодическая функция.

Если $\mu_0 = 0$, то ограниченность решений системы (1) равносильна ограниченности решений системы (3). Если $\mu_0 > 0$, то все решения (1) не могут быть ограниченными при $t \to +\infty$. Если $\mu_0 < 0$, то для ограниченности решений системы (1) при $t \to +\infty$ необходимо и достаточно, чтобы характеристические показатели μ системы (3) были больше или равны μ_0: $\mu_0 \leqslant \mu$.

4. Пусть $\mu = -\lambda \neq 0$ — минимальный характеристический показатель системы (3). Это значит, что матрица A из (6) имеет вид

$$A = S \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} S^{-1},$$

где S — некоторая невырожденная матрица.

По истечении времени $t = \omega$, вектор $\mathbf{y}(t) \neq 0$ произвольного решения системы (3) повернется на угол $k\pi + \varphi$, где k — фиксированное число; $|\varphi| < \pi$. Пусть $\varphi_{\min}$ — нижняя, $\varphi_{\max}$ — верхняя грань углов φ по всем решениям системы (3). Назовем $\varphi_{\max}$, $|\varphi_{\min}|$ максимальными угловыми отклонениями системы (3) ($\varphi_{\max} + |\varphi_{\min}| < \pi$). В силу (6), (7) максимальные угловые отклонения системы (3) совпадают с максимальными угловыми отклонениями преобразования $\mathbf{y} = B\mathbf{y}_0$; $B = e^{A\omega}$. Найдем максимальные угловые отклонения этого преобразования.

При рассмотрении произвольных невырожденных матриц S можно ограничиться матрицами S вида

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \cos\beta \\ 0 & \sin\beta \end{pmatrix}. \tag{*}$$

Действительно, S можно записать в виде произведения

$$S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix},$$

откуда

$$A=S\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{pmatrix}S^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \cos\beta\\ \sin\alpha & \sin\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \cos\beta\\ \sin\alpha & \sin\beta\end{pmatrix}^{-1},$$

следовательно, достаточно рассматривать матрицы

$$S=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \cos\beta\\ \sin\alpha & \sin\beta\end{pmatrix}.$$

Векторы $\mathbf{s}_1=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$, $\mathbf{s}_2=\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}$ являются собственными векторами преобразования $B\mathbf{y}_0=Se^{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{pmatrix}\omega}S^{-1}\mathbf{y}_0$. При определении угловых отклонений важен лишь угол между векторами $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, а не их расположение на плоскости, поэтому можно положить $\mathbf{s}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, т. е. ограничиться матрицами S вида (*).

Положим

$$\Phi(\mathbf{y}_0)=\cos\varphi=\frac{(\mathbf{y}_0,\ B\mathbf{y}_0)}{|\mathbf{y}_0|\cdot|B\mathbf{y}_0|}. \tag{9}$$

Задача свелась к нахождению экстремальных (минимальных) значений функции $\Phi(\mathbf{y}_0)$.

Матрица B, при сделанных оговорках на выбор S, имеет вид:

$$B=\begin{pmatrix}e^{\lambda\omega} & -2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{sh}\lambda\omega\\ 0 & e^{-\lambda\omega}\end{pmatrix}.$$

В силу линейности преобразования B при подсчете углов отклонения можно ограничиться векторами $\mathbf{y}_0$ вида $\mathbf{y}_0=\begin{pmatrix}\gamma\\ 1\end{pmatrix}$.

Необходимое условие экстремума функции $\Phi(\mathbf{y}_0)$, $\mathbf{y}_0=\begin{pmatrix}\gamma\\ 1\end{pmatrix}$, состоит в том, что

$$\Phi'_\gamma=0.$$

После элементарных вычислений оно сводится к уравнению 3-й степени

$$L\gamma^3+M\gamma^2+N\gamma+R=0, \tag{10}$$

где $L=2e^{\lambda\omega}\operatorname{sh}^2\lambda\omega$, $M=-6e^{\lambda\omega}\operatorname{ctg}\beta\operatorname{sh}^2\lambda\omega$, $N=4\operatorname{ctg}^2\beta\operatorname{sh}^2\lambda\omega(\operatorname{sh}\lambda\omega+e^{\lambda\omega})-2e^{-\lambda\omega}\operatorname{sh}^2\lambda\omega$, $R=-\operatorname{ctg}\beta\operatorname{sh}\lambda\omega(4\operatorname{ctg}^2\beta\operatorname{sh}^2\lambda\omega+e^{-2\lambda\omega}-1)$; $\gamma=\operatorname{ctg}\beta$ является решением этого уравнения, так как соответствует собственному направлению B (точка максимума $\cos\varphi$).

Выделяя из уравнения (10) множитель $\gamma-\operatorname{ctg}\beta$, приходим к уравнению 2-го порядка

$$A\gamma^2+B\gamma+C=0,$$

где $A=e^{\lambda\omega}\operatorname{sh}^2\lambda\omega$, $B=-2e^{\lambda\omega}\operatorname{ctg}\beta\operatorname{sh}^2\lambda\omega$, $C=\operatorname{sh}^2\lambda\omega(2\operatorname{ctg}^2\beta\operatorname{sh}\lambda\omega-e^{-\lambda\omega})$. Его корни

$$\gamma_{1,2}=\operatorname{ctg}\beta\pm\frac{e^{-\lambda\omega}}{\sin\beta}.$$

Подставляя их в (9), получим искомые минимальные значения:

$$\min\Phi(\gamma)=\frac{1\pm\operatorname{ch}\lambda\omega\cos\beta}{\operatorname{ch}\lambda\omega\pm\cos\beta},$$

откуда

$$|\varphi_{\max,\min}|=\arccos\frac{1\pm\operatorname{ch}\lambda\omega\cos\beta}{\operatorname{ch}\lambda\omega\pm\cos\beta}.$$

При убывании β угол $|\varphi_{min}|$ убывает, φ_{max} возрастает. При возрастании λ $(\lambda > 0)$ $|\varphi_{min}|$, φ_{max} увеличиваются (φ отсчитывается по часовой стрелке, β — против).

5. Изменение угла φ решения системы (3) за время dt равно

$$d\varphi = \frac{(\mathbf{y}', I\mathbf{y})}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})} dt = \frac{(P\mathbf{y}, I\mathbf{y})}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})} dt = \frac{(H\mathbf{y}, \mathbf{y})}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})} dt,$$

откуда

$$\int_0^\omega h_{\min}(t)\, dt \leqslant \varphi_\omega - \varphi_0 \leqslant \int_0^\omega h_{\max}(t)\, dt,$$

где $h_{\min}$, $h_{\max}$ — минимальное и максимальное собственные значения матрицы H.

6. Учитывая сказанное, получаем критерий:

Критерий ограниченности решений системы (1). *Если хотя бы для одного* $k = 0, \pm 1, \ldots$; β, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$, *имеют место неравенства*

$$k\pi - \int_0^\omega h_{\min}(\tau)\, d\tau \leqslant \arccos \frac{1 - \operatorname{ch} \mu_0\omega \cdot \cos\beta}{\operatorname{ch} \mu_0\omega - \cos\beta};$$

$$\int_0^\omega h_{\max}(\tau)\, d\tau - k\pi \leqslant \arccos \frac{1 + \operatorname{ch} \mu_0\omega \cdot \cos\beta}{\operatorname{ch} \mu_0\omega + \cos\beta},$$

где $\mu_0 < 0$ *определяется по* (8), *а* $h_{\min}(t)$, $h_{\max}(t)$ — *минимальное и максимальное собственные значения матрицы* (5), *то все решения системы* (1) *ограничены при* $t \to +\infty$.

При $\mu_0 = 0$, полагая $\beta = 0$ и заменяя знаки $\leqslant$ на $<$, получим критерий ограниченности решений системы (3), совпадающий с критерием 1° В. А. Якубовича ([2]).

Поступило
12 III 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1950, стр. 269.
[2] В. А. Якубович, ДАН, 78, № 2 (1951).