Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 3

МАТЕМАТИКА

С. Я. АЛЬПЕР и В. В. ИВАНОВ

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ЧАСТНЫМИ СУММАМИ РЯДА ПО ПОЛИНОМАМ ФАБЕРА

(Представлено академиком М. В. Келдышем 19 III 1953)

В теории равномерных приближений функций комплексного переменного С. Н. Мергеляном (1) были получены оценки сверху для наилучшего приближения непрерывных функций на произвольных ограниченных континуумах, не разбивающих плоскости, а также точные, в известном смысле, оценки наилучшего приближения для некоторых классов функций на континуумах специального вида.

Мы покажем, что полиномы совершенно определенного вида, именно, частные суммы ряда по полиномам Фабера, дают в некоторых случаях приближение функции, близкое к наилучшему приближению. Верхние границы обоих приближений оказываются при некоторых условиях просто величинами одного порядка.

Пусть K представляет ограниченный континуум, не разбивающий плоскость; G — односвязное дополнение K до полной плоскости, содержащее бесконечно удаленную точку. С помощью функции $w=\Phi(z)$ отобразим конформно область G на область $|w|>\rho$ так, чтобы точки $z=\infty$ и $w=\infty$ соответствовали друг другу и $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\Phi(z)}{z}=1$; $z=\psi(w)$ — обратная функция. Через $\Phi_k(z)$ обозначим полином Фабера k-й степени, соответствующий континууму K.

Лемма. *Пусть на континууме K задана непрерывная функция $f(z)$ и для этого континуума функция $z=\psi(w)$ непрерывна вне круга радиуса ρ с включением точек окружности $|w|=\rho$. Если числа a_k определены формулой*

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=\rho}\frac{f[\psi(\tau)]}{\tau^{k+1}}d\tau, \tag{1}$$

то справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_k w^k\right|<C\max_{z\in K}|f(z)|\lg n \quad (n>1), \tag{2}$$

где $|w|=\rho$ и C — константа, не зависящая от n и w.

Положим $w=\rho e^{i\alpha}$, $\tau=\rho e^{i\vartheta}$, тогда

$$\sum_{k=0}^{n}a_k w^k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f[\psi(\rho e^{i\vartheta})]\sum_{k=0}^{n}e^{ki(\alpha-\vartheta)}\,d\vartheta. \tag{3}$$

Введем еще величины $f[\psi(\rho e^{i\vartheta})] = F(\vartheta)$, $\vartheta - \alpha = u$, и рассмотрим одно из слагаемых I_k суммы (3):

$$I_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F[\rho e^{i(\alpha+u)}]\, e^{-kiu}\, du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} F[\rho e^{i(\alpha+u)}]\, du + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} F[\rho e^{i(\alpha-u)}]\, e^{kiu}\, du.$$

Заменяя переменную u на $2u$, получим:

$$I_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \{F[\rho e^{i(\alpha+2u)}] + F[\rho e^{i(\alpha-2u)}]\} \cos 2ku\, du +$$

$$+ \frac{i}{\pi}\int_0^{\pi/2} \{F[\rho e^{i(\alpha-2u)}] - F[\rho e^{i(\alpha+2u)}]\} \sin 2ku\, du. \tag{4}$$

Из тождества $(e^{iu} - e^{-iu}) \sum\limits_{k=0}^{n} e^{2kiu} = e^{(2n+1)iu} - e^{-iu}$ следуют неравенства

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \cos 2ku\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{u}, \quad \left|\sum_{k=0}^{n} \sin 2ku\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{u} \quad \left(0 < u \leqslant \frac{\pi}{2}\right). \tag{5}$$

Разбивая отрезок интегрирования $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ в каждом из интегралов (4) на части $\left[0, \frac{\pi}{2(n+1)}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2(n+1)}, \frac{\pi}{2}\right]$, суммируя выражения I_k и оценивая тригонометрические суммы под знаком каждого интеграла числом $n+1$ на первом отрезке и с помощью неравенств (5) на втором отрезке, получим неравенство (2).

Теорема 1. *Если область D ограничена конечным числом не касательных друг к другу гладких дуг, составляющих между собой углы, внешние растворы которых не меньше $\pi\lambda$ $(0 < \lambda \leqslant 1)$, и функция $f(z)$, аналитическая в области D, имеет p-ю производную, непрерывную в замкнутой области $\overline{D}$, причем $\omega_p(\delta)$ будет модуль непрерывности $f^{(p)}(z)$ в $\overline{D}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует при $p > 0$ константа C_1, не зависящая от n и z, такая, что*

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z) \right| < C_1 \frac{1}{n^{\lambda p - \varepsilon}}\, \omega_p\left(\frac{1}{n^{\lambda-\varepsilon}}\right), \quad z \in \overline{D}. \tag{6}$$

Если $p = 0$, то

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z) \right| < C_2 \omega\left(\frac{1}{n^{\lambda-\varepsilon}}\right) (\lg n)^2, \tag{7}$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f(z)$ в $\overline{D}$. Коэффициенты a_k определяются формулой (1).

Для полиномов Фабера справедливо соотношение ([2])

$$\Phi_k(z) = [\Phi(z)]^k + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_r} \frac{[\Phi(\zeta)]^k}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{8}$$

где L_r — образ окружности $|w| = r$, $r > \rho$, при отображении $w = \Phi(\zeta)$ и z лежит вне L_r.

Так как граница Г области D спрямляема, то интеграл в формуле (8) может быть взят по кривой Г, и z будет произвольная точка вне Г. Отсюда

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k [\Phi(z)]^k + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \sum_{k=0}^{n} a_k [\Phi(\zeta)]^k. \tag{9}$$

Если область ограничена конечным числом не касательных между собой гладких дуг, то справедливо неравенство [1]

$$\int_{\Gamma} \frac{ds}{|\zeta - z|} < A \lg \frac{1}{R - \rho}, \quad z \in L_R, \quad R > \rho, \tag{10}$$

где $ds = |d\zeta|$ и константа A зависит только от кривой Г.

На основании известной теоремы С. Н. Бернштейна из условия $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k w^k\right| < M$, $|w| = \rho$, следует для $|w| = R > \rho$ неравенство $\left|\sum a_k w^k\right| < M\left(\frac{R}{\rho}\right)^n$. Отсюда с помощью соотношений (2), (9) и (10) будем иметь для $z \in L_R$, $R = \rho\left(1 + \frac{1}{n}\right)$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z)\right| < C_3 \max_{z \in \overline{D}} |f(z)| \lg n + C_4 \max_{z \in \overline{D}} |f(z)| (\lg n)^2,$$

или, для $z \in \overline{D}$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z)\right| < C_5 \max_{z \in \overline{D}} |f(z)| (\lg n)^2, \quad n > 1 \tag{11}$$

(константы $C_2, \ldots, C_5$, встречающиеся здесь и дальше, не зависят от n и z).

Положим для сокращения $S_n[f] = S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z)$ и пусть $T_n(z)$ будет полином наилучшего приближения n-й степени для $f(z)$ в $\overline{D}$. Очевидно, $S_n[T_n] = T_n(z)$ и $|f(z) - T_n(z)| \leqslant \rho_n(f, \overline{D})$, где $\rho_n(f, \overline{D})$ — наилучшее приближение n-й степени $f(z)$ в $\overline{D}$, т. е. нижняя граница чисел $\max_{z \in \overline{D}} |f(z) - P_n(z)|$ по всевозможным полиномам степени $\leqslant n$.

Замечая, что $|S_n[f - T_n]| = |S_n[f] - T_n(z)| < C_5 \rho_n(f, \overline{D}) (\lg n)^2$, получаем

$$|f(z) - S_n[f]| < C_6 \rho_n(f, \overline{D}) (\lg n)^2 \quad (z \in \overline{D},\ n > 1). \tag{12}$$

Используя оценку $\rho_n(f, \overline{D}) < C_7 \frac{1}{n^{p\lambda - \varepsilon}} \omega_p\left(\frac{1}{n^{\lambda - \varepsilon}}\right)$, полученную С. Н. Мергеляном для области и функции, удовлетворяющих условиям этой теоремы, завершаем ее доказательство.

Аналогичные рассуждения приводят к следующей теореме:

Теорема 2. *Пусть l — незамкнутая жорданова кривая, состоящая из конечного числа не касательных друг к другу гладких дуг углы между которыми не меньше* $\pi\lambda$ $(0 < \lambda \leqslant 1)$.

Если $f(z)$ определена на l и имеет вдоль l непрерывную p-ю производную $f^{(p)}(z)$, модуль непрерывности которой $\omega_p(\delta)$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно при $p > 0$ указать константу $C_8 > 0$ такую, что

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z) \right| < C_8 \frac{1}{n^{p\lambda-\varepsilon}} \omega_p \left(\frac{1}{n^{\lambda-\varepsilon}} \right) \quad (z \in l); \tag{13}$$

при $p = 0$ существует константа $C_9 > 0$, для которой при $z \in l$

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z) \right| < C_9 \omega \left(\frac{1}{n^{\lambda-\varepsilon}} \right) (\lg n)^2, \tag{14}$$

где коэффициенты a_k определяются попрежнему формулой (1).

Из теоремы 1 вытекает, что система полиномов Фабера образует базис в $\overline{D}$, т. е. имеет место разложение $f(z)$ в равномерно сходящийся в $\overline{D}$ ряд $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z)$, если область удовлетворяет условию этой теоремы, а $f(z)$ аналитическая в D, непрерывная в $\overline{D}$ функция, модуль непрерывности которой $\omega(\delta)$ удовлетворяет в $\overline{D}$ условию $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta)(\lg \delta)^2 = 0$.

Для кривой l, удовлетворяющей условию теоремы 2, полиномы Фабера также образуют базис в классе функций $f(z)$, непрерывных на l с модулем непрерывности $\omega(\delta)$, если выполнено соотношение $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta)(\lg \delta)^2 = 0$.

Если l представляет отрезок вещественной оси $-1 \leqslant z \leqslant 1$, то полиномы Фабера обращаются в полиномы Чебышева $\Phi_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arc\cos z)$ и, как частный случай последнего утверждения, получается известный факт,что полиномы Чебышева образуют базис в классе функций, непрерывных на отрезке $-1 \leqslant z \leqslant 1$ и удовлетворяющих на нем условию Липшица порядка α, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Поступило
6 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Мергелян, Усп. матем. наук, 7, 2 (48) (1952). [2] А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, 1950.