Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 2

ФИЗИКА

Ю. С. САЯСОВ

ЯВЛЕНИЕ СИЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ ПРИ НЕЗНАЧИТЕЛЬНЫХ НАРУШЕНИЯХ ЦИЛИНДРИЧНОСТИ

(Представлено академиком В. А. Фоком 17 III 1953)

Настоящая работа посвящена исследованию влияния малых деформаций боковых стенок длинных идеально проводящих цилиндрических резонаторов на их собственные электромагнитные колебания. Основной результат зтого исследования можно сформулировать следующим образом: возмущение поля в длинном цилиндре пропорционально не только относительному искажению боковых стенок, но содержит еще дополнительный множитель порядка квадрата отношения длины цилиндра к его поперечному размеру; если указанное отношение достаточно велико, то самое ничтожное искажение цилиндричности приводит к заметному возмущению поля.

Строгое доказательство высказанных утверждений может быть проведено в тех случаях, когда решения уравнений Максвелла как для невозмущенной, так и для возмущенной областей выражаются в известных функциях. Ниже подробно рассматривается один из таких специальных случаев: невозмущенная область — круговой цилиндр, возмущенная область образована координатными поверхностями, принадлежащими к сферической системе координат, т. е. конической поверхностью, заключающей цилиндр и проходящей через одну из его торцевых окружностей, а также двумя сферами, проходящими через торцевые окружности цилиндра. Введем следующие обозначения: r_1 и r_2 — радиусы, отсчитываемые от начала сферической системы координат до сферических оснований возмущенной области; r — текущий радиус сферической системы координат ($r_1 \leqslant r \leqslant r_2$); θ, φ — углы, входящие в сферическую систему координат; угол θ отсчитывается от оси цилиндра, причем θ_0 есть половина угла раствора конической поверхности. Длину цилиндра обозначим через L и его радиус через R. Степень возмущения боковых стенок цилиндра будем характеризовать параметром $\varepsilon = \delta R / R$, где δR — приращение расстояния от оси цилиндра до конической поверхности при изменении r от r_1 до r_2. Отметим, что ε связан с θ_0 и r_1 простыми соотношениями, постоянно используемыми в дальнейшем:

$$\varepsilon = \frac{L}{R}\theta_0 = \frac{L}{r_1}, \text{ так как } \theta_0 = \frac{\delta R}{L} \text{ и } r_1 = \frac{R}{\theta_0}. \tag{1}$$

Исследуем подробно колебания электрического типа E_{0pn} (n — число узлов вдоль оси резонатора, p — число узлов вдоль радиуса резонатора). В рассматриваемой области таким колебаниям отвечают следующие отличные от нуля компоненты электромагнитного поля ([1])*:

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{\nu^2 - {}^1/_4}{x^2}\left(C_1\psi_{\nu-{}^1/_2} + C_2\varphi_{\nu-{}^1/_2}\right) P_{\nu-{}^1/_2}(\cos\theta),\\
E_\theta &= \frac{1}{x}\left(C_1\psi'_{\nu-{}^1/_2} + C_2\varphi'_{\nu-{}^1/_2}\right)\frac{\partial}{\partial\theta} P_{\nu-{}^1/_2}(\cos\theta),\\
H_\varphi &= \frac{1}{x}\left(C_1\psi_{\nu-{}^1/_2} + C_2\varphi_{\nu-{}^1/_2}\right)\frac{\partial}{\partial\theta} P_{\nu-{}^1/_2}(\cos\theta),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $x = kr$; k — волновое число; $P_{\nu-{}^1/_2}(\cos\theta)$ — функция Лежандра с индексом $\nu - {}^1/_2$; $\psi_{\nu-{}^1/_2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}x}\, J_\nu(x)$; $\varphi_{\nu-{}^1/_2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}x}\, Y_\nu(x)$; $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода с индексом ν; C_1, C_2 — постоянные; $\psi'_{\nu-{}^1/_2}$, $\varphi'_{\nu-{}^1/_2}$ — производные $\psi_{\nu-{}^1/_2}(x)$, $\varphi_{\nu-{}^1/_2}(x)$ по x.

Краевые условия таковы:

$$
\begin{aligned}
&E_r = 0 \quad \text{при } \theta = \theta_0, && \text{т. е. } P_{\nu-{}^1/_2}(\cos\theta_0) = 0;\\
&E_\theta = 0 \quad \text{при } r = r_1 \text{ и } r = r_2, && \text{т. е. } C_1\psi'_{\nu-{}^1/_2} + C_2\varphi'_{\nu-{}^1/_2} = 0\\
&\qquad \text{при } x = x_1,\ x = x_2;\ x_1 = kr_1,\ x_2 = kr_2.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Поскольку предполагается, что $\theta_0 \ll 1$, то из условия $P_{\nu-{}^1/_2}(\cos\theta_0) = 0$ следует, что $\nu - {}^1/_2 \gg 1$. Но при $\nu - {}^1/_2 \gg 1$ имеет место асимптотическая формула ([2]):

$$
P_{\nu-{}^1/_2}(\cos\theta) = \sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}}\, J_0(\nu\theta). \tag{4}
$$

Из (4) легко получаем в первом приближении относительно $1/\nu$ простое соотношение между θ_0 и ν:

$$
\theta_0 = \frac{\mathrm{M}_{0p}}{\nu}, \tag{5}
$$

где M_{0p} — p-й корень бесселевой функции нулевого порядка.

Так как волновое число k для колебаний типа E_{0p0} незначительно отличается от волнового числа для невозмущенной области, то $x_1 = kr_1 \simeq \frac{\mathrm{M}_{0p}}{R}\frac{R}{\theta_0} = \nu$ (см. ([1,5])), т. е. примерно совпадает с индексом ν; аналогично $x = kr \simeq \nu$, так как $r/r_1 \simeq 1$. Этот факт имеет место и для колебаний типа E_{0pn}, если расстояние между узлами на оси велико по сравнению с радиусом цилиндра. Поэтому исследование перехода к невозмущенному цилиндру необходимо производить с помощью асимптотических представлений бесселевых функций с большим индексом, аргумент которых может быть близок к индексу.

Наиболее удобной для этой цели оказалась (благодаря своей общности и простоте) найденная В. А. Фоком формула ([2,3]), справедливая при любых значениях аргумента x от нуля до бесконечности:

$$
H_\nu^{(1)}(x) = e^{i\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt[4]{x^2-\nu^2}}\sqrt{\xi}\, H^{(1)}_{{}^1/_3}(\xi); \qquad \xi = \int_\nu^x \sqrt{1-\eta^2}\,dx; \qquad \eta = \quad x \tag{6}
$$

где $H_\nu^{(1)}(x)$, $H^{(1)}_{{}^1/_3}(\xi)$ — функции Ганкеля первого рода с индексами $\nu \gg 1$ и ${}^1/_3$.

Формула (6) существенно упрощается в двух случаях: при $|t| \ll 1$ и $\xi \gg 1$, где $t = \frac{\nu - x}{(x/2)^{{}^1/_3}}$.

Исследуем вначале случай $|t| \ll 1$. Этому условию отвечают, как мы сейчас убедимся, колебания типа E_{0p0}, не имеющие узлов на оси резонатора.

---

* Здесь и всюду в дальнейшем опущены временные множители $\sin\omega t$, $\cos\omega t$.

При $|t| \sim 1$ функции $\psi_{\nu-1/2}(x)$, $\varphi_{\nu-1/2}(x)$ могут быть представлены с помощью (6) в виде (см. ([3]), стр. 57):

$$\begin{aligned} \psi_{\nu-1/2}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{1/6} v(t); \qquad \psi'_{\nu-1/2}(x) = -\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/6} \frac{dv}{dt}; \\ \varphi_{\nu-1/2}(x) &= -\left(\frac{x}{2}\right)^{1/6} u(t); \qquad \varphi'_{\nu-1/2}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-1/6} \frac{du}{dt}, \end{aligned} \tag{7}$$

где $u = a\cos\frac{\pi}{6}\left(1 + \frac{1}{6}t^3 + \ldots\right) + b\cos\frac{\pi}{6}\left(t + \frac{1}{12}t^4 + \ldots\right)$, $v = a\sin\frac{\pi}{6}\left(1 + \frac{1}{6}t^3 + \ldots\right) - b\sin\frac{\pi}{6}\left(t + \frac{1}{12}t^4 + \ldots\right)$ — известные функции Эйри; a, b — постоянные. Используя (4), (7) и краевое условие $C_1\psi'_{\nu-1/2}(x_1) + C_2\varphi'_{\nu-1/2}(x_1) = 0$, перепишем (2) таким образом*:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\nu^2}{x^2}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{1/6}\left(1 - \frac{1}{2}t_1^2 t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{3}t_1^3\right) J_0(\mathrm{M}_{0p}\sigma), \\ E_\theta &= -\frac{\nu}{x}\left(\frac{xx_1}{4}\right)^{-1/6} \frac{1}{2}(t_1^2 - t^2) J_1(\mathrm{M}_{0p}\sigma), \\ H_\varphi &= -\frac{\nu}{x}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{1/6}\left(1 - \frac{1}{2}t_1^2 t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{3}t_1^3\right) J_1(\mathrm{M}_{0p}\sigma), \end{aligned} \tag{8}$$

причем $\sigma = \theta/\theta_0$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $t_1 = (\nu - x_1)/(x_1/2)^{1/3}$.

Условие $E_\theta = 0$ при $x = x_2$ дает такое уравнение для определения волнового числа k:

$$t_2 = -t_1 \text{ или } \frac{\nu - x_1}{(x_1/2)^{1/3}} = -\frac{\nu - x_2}{(x_2/2)^{1/3}}. \tag{9}$$

Из (9) находим в первом приближении по ε

$$k = \frac{2\nu}{r_1 + r_2} = \frac{2\nu}{2r_1 + 1} = \frac{\nu}{r_1}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{r_1}\right) = k_0\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right); \quad k_0 = \frac{\mathrm{M}_{0p}}{R}. \tag{10}$$

Используя (10), получаем далее:

$$t = \frac{\nu - x}{(x/2)^{1/3}} = \frac{1}{2}\mathrm{M}_{0p}\frac{L}{R}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{1/3} s; \quad s = \frac{L/2 - z}{L/2}; \quad -1 \leqslant s \leqslant 1; \tag{11}$$

z — координата, отсчитываемая вдоль оси цилиндра от его начала (при $r = r_1$).

В (8) сомножители типа ν/x, x/x_1 дают изменение поля вдоль оси резонатора порядка ε. В предположении $L/R \gg 1$ таким изменением можно пренебречь, и тогда (8) окончательно записывается в виде:

$$\begin{aligned} E_r &= (1 + {}^1/_2\rho^2\varepsilon f(s)) J_0(\mathrm{M}_{0p}\sigma), \quad E_\theta = -{}^1/_2\rho\varepsilon(1 - s^2) J_1(\mathrm{M}_{0p}\sigma), \\ H_\varphi &= -(1 + {}^1/_2\rho^2\varepsilon f(s)) J_1(\mathrm{M}_{0p}\sigma), \end{aligned} \tag{12}$$

где $\rho = \frac{1}{2}\mathrm{M}_{0p}\frac{L}{R}$; $f(s) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}s^3 - s$; $p = 1, 2, \ldots$

Согласно (12) E_r возрастает от более узкого конца к более широкому на величину ${}^2/_3\,\rho^2\varepsilon$.

Убывание к более узкому концу составляет исключительную особенность колебаний типа E_{0p0}; колебания электрического типа E_{0pn} $(n \geqslant 1)$, к исследованию которых мы сейчас переходим, этим свойством не обладают.

Для колебаний типа E_{0pn} правильный переход к невозмущенным колебаниям в идеальном цилиндре получается при использовании в качестве асимптотических выражений для $\psi_{\nu-1/2}(x)$, $\varphi_{\nu-1/2}(x)$ не (7), а формул, получающихся из (6) в приближении Дебая ($\xi \gg 1$, см. ([3]), стр. 15):

---

* В (8) отброшены такие члены, которые дают поправки к полю в идеальном цилиндре второго порядка по ε.

$$\psi_{\nu-1/2}(x) = (1-\eta^2)^{-1/4}\cos\left(\xi-\frac{\pi}{4}\right); \quad \psi'_{\nu-1/2}(x) = -(1-\eta^2)^{1/4}\sin\left(\xi-\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\varphi_{\nu-1/2}(x) = (1-\eta^2)^{-1/4}\sin\left(\xi-\frac{\pi}{4}\right); \quad \varphi'_{\nu-1/2}(x) = (1-\eta^2)^{1/4}\cos\left(\xi-\frac{\pi}{4}\right). \tag{13}$$

С помощью (13), учитывая краевые условия $E_\theta = 0$ при $r = r_1$ и $r = r_2$, получаем уравнение для определения волнового числа k:

$$\xi_2 - \xi_1 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1-\eta^2}\, dx = n\pi, \quad n \text{ — целое число.} \tag{14}$$

Представим k^2 в виде: $k^2 = k_0^2(1+\varepsilon\varkappa)$, $k_0^2 = k_R^2 + k_z^2$, где $k_R = \mathrm{M}_{0p}/R$, $k_z = \pi n / L$. Преобразуем теперь величину $1-\eta^2$, считая $\rho = k_R / k_z \gg 1$:

$$1-\eta^2 = 1 - \frac{\nu^2}{x^2} = 1 - \frac{\nu^2}{k_R^2(1+2z/r_1)(1+1/\rho^2)(1+\varepsilon\varkappa)} =$$
$$= \frac{1}{\rho^2}[1+\varepsilon\rho^2(\varkappa+2\zeta)]. \tag{15}$$

В (15) учтено, что $k_R r_1 = \nu$, $z / r_1 = \varepsilon\zeta$ и введено обозначение $\zeta = z / L$. В квадратных скобках сохранены только члены первого порядка малости относительно параметра $\varepsilon\rho^2$ и нулевого порядка относительно $1/\rho$. Разлагая ξ в ряд по степеням $1-\eta^2$ (см. ([3]), стр. 55) и используя (15), легко находим:

$$\xi = \int_\nu^x \sqrt{1-\eta^2}\, dx = \frac{\nu}{3}\frac{1}{\rho^3}\left[1 + \frac{3}{2}\varepsilon\rho^2(\varkappa+2\zeta) + \frac{3}{8}\varepsilon^2\rho^4(\varkappa+2\zeta)^2\right]. \tag{16}$$

Здесь в квадратных скобках сохранены величины первого и второго порядка малости по $\varepsilon\rho^2$ и нулевого по $1/\rho$.

С помощью (16), учитывая, что

$$\frac{\nu\varepsilon}{\rho} = \frac{\mathrm{M}_{0p}}{\theta_0}\frac{\pi n R}{\mathrm{M}_{0p} L}\frac{L}{R}\theta_0 = n\pi,$$

а также краевое условие $\sin(\xi_2 - \xi_1) = 0$, получаем:

$$\varkappa = -1, \text{ т. е. } k = k_0(1 - {}^1/_2\varepsilon), \quad k_0^2 = k_R^2 + k_z^2, \tag{17}$$
$$\xi - \xi_1 = \pi n\zeta\,[1 + {}^1/_2\,\varepsilon\rho^2(\zeta - 1)]. \tag{18}$$

Используя (13) и (15), получаем окончательные формулы:

$$E_r = (1 - {}^1/_2\varepsilon\rho^2\zeta)\cos(\xi-\xi_1)\, J_0(\mathrm{M}_{0p}\sigma),$$
$$E_\theta = -\frac{1}{\rho}(1 + {}^1/_2\varepsilon\rho^2(1+\zeta))\sin(\xi-\xi_1)\, J_1(\mathrm{M}_{0p}\sigma), \tag{19}$$
$$H_\varphi = -(1 - {}^1/_2\varepsilon\rho^2\zeta)\cos(\xi-\xi_1)\, J_1(\mathrm{M}_{0p}\sigma);$$

здесь $\xi - \xi_1$ определено по (18).

Согласно (19), амплитуда E_r убывает к более широкому концу по закону $1 - {}^1/_2\varepsilon\rho^2\zeta$. Если расстояние между узлами на оси значительно превышает радиус, то такое убывание может быть значительным, даже при ничтожно малых ε.

Я очень благодарен Л. А. Вайнштейну и А. С. Компанейцу за ценные критические замечания.

Институт химической физики
Академии наук СССР

Поступило
16 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. де Бройль, Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах, М., 1938. [2] В. А. Фок, ДАН, 1, № 3, 97 (1934). [3] В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, М., 1946.