

В. А. КРАСИЛЬНИКОВ и В. И. ТАТАРСКИЙ

## РАССЕЯНИЕ ЗВУКА В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 16 III 1953)

Рассеяние звука в турбулентном потоке происходит как за счет пульсаций скорости потока, так и за счет температурных неоднородностей, перемешиваемых потоком. Мы предположим, что турбулентный поток может быть описан уравнениями несжимаемой вязкой жидкости. В несжимаемой жидкости рассеяние на неоднородностях температуры и рассеяние на пульсациях скорости потока происходят независимо друг от друга. Общий эффект рассеяния будет являться суммой этих эффектов.

Распространение звука в турбулентном потоке описывается волновым уравнением акустики движущейся среды.

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\vec{\nabla} \right)^2 \Psi = 0, \quad (1)$$

где  $\Psi$  — потенциал звукового поля,  $c$  — скорость звука и  $\mathbf{v}$  — скорость движения среды. В системе координат, движущейся со средней скоростью потока, под  $\mathbf{v}$  нужно понимать пульсационную скорость. Предполагая, что пульсации скорости потока значительно меньше скорости звука в среде, в уравнении (1) можно пренебречь членом, содержащим  $v^2$ . Уравнение (1) принимает тогда следующий вид:

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{2}{c^2} v_i \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial v_i}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}. \quad (2)$$

В этом выражении и в дальнейшем мы опускаем знак суммирования от 1 до 3 по дважды повторяющимся индексам. Чтобы сравнить величины первого и второго членов в правой части (2), мы должны рассмотреть спектральный состав поля скоростей в потоке. Если наибольшая частота, содержащаяся в спектре  $v$ , есть  $\Omega$ , то  $\partial v_i / \partial t$  имеет порядок  $\Omega v_i$ ;  $\partial \Psi / \partial t$  имеет порядок  $\omega \Psi$ , где  $\omega$  — частота звука. Таким образом, при выполнении условия  $\omega \gg \Omega$  мы можем пренебречь вторым членом в правой части уравнения (2). Величина  $\Omega$ , согласно экспериментальным данным, не превышает 100 гц, и второй член в правой части уравнения (2) скажется лишь при самых низких звуковых частотах\*.

Уравнение

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{2}{c^2} v \frac{\partial^1 \Psi}{\partial x_i \partial t}$$

(без члена, содержащего ускорение) может быть решено методом последовательных приближений. В качестве первого приближения

\* Следует заметить, что для тех частот звука, которые сравнимы с частотами пульсаций, применение уравнения (1) может быть обосновано лишь в том случае, когда пульсации давления в потоке значительно превосходят звуковые давления.

выбирается плоская монохроматическая волна  $A_0 e^{i(k_j x_j - \omega t)}$  с амплитудой  $A_0$ , частотой  $\omega$  и волновым вектором  $k_j$ . Для среднего квадрата амплитуды рассеянной в направлении единичного вектора  $\mathbf{n}$  волны А. М. Обухов (1) (предположив статистическую однородность и изотропию потока) получил следующее выражение:

$$|\overline{\Psi_1}|^2 = \frac{A_0^2 \omega^2 k_i k_j V}{(2\pi r c^2)^2} \int_V R_{ij}(\vec{\rho}) e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}^n)\rho} (d\vec{\rho}), \quad (3)$$

где  $V$  — величина рассеивающего объема,  $r$  — расстояние от этого объема до точки наблюдения и

$$R_{ij}(\vec{\rho}) = \overline{v_i(\mathbf{r}) v_j(\mathbf{r} + \vec{\rho})}. \quad (4)$$

Направим ось  $z$  по вектору  $\mathbf{k} - \mathbf{k}^n$ , а плоскость  $x, z$  проведем через векторы  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k} - \mathbf{k}^n$ . Обозначая угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{n}$  (угол между направлениями падающей и рассеянной волн) через  $\theta$ , найдем:

$$\mathbf{k} - \mathbf{k}^n = \left\{ 0, 0, 2k \sin \frac{\theta}{2} \right\}; \quad \mathbf{k} = \left\{ k \cos \frac{\theta}{2}, 0, k \sin \frac{\theta}{2} \right\}; \quad (5)$$

$$\vec{\rho} = \rho \{ \cos \varphi \sin \psi, \sin \varphi \sin \psi, \cos \psi \} = \rho \mathbf{m}.$$

Здесь  $\rho, \varphi$  и  $\psi$  — сферические координаты точки  $\vec{\rho}$ . В этих координатах выражение (3) принимает следующий вид:

$$|\overline{\Psi_1}|^2 = \frac{A_0^2 \omega^2 k_i k_j V}{(2\pi r c^2)^2} \int_V R_{ij}(\vec{\rho}) e^{2ik\rho \sin \frac{\theta}{2} \cos \psi} \rho^2 \sin \psi d\rho d\varphi d\psi. \quad (6)$$

Но, как известно (см., например, (2)),

$$R_{ij}(\vec{\rho}) = (R_{rr} - R_{tt}) m_i m_j - R_{tt} \delta_{ij}, \quad (7)$$

где  $R_{rr}(\rho)$  и  $R_{tt}(\rho)$  являются функциями только от расстояния между точками наблюдения. Для вычисления выражения (6) нам понадобятся только компоненты  $R_{11}, R_{13}, R_{33}$ , так как отличны от нуля лишь  $k_1$  и  $k_3$ . Они имеют следующий вид:

$$R_{11}(\vec{\rho}) = (R_{rr} - R_{tt}) \cos^2 \varphi \sin^2 \psi + R_{tt}; \quad R_{13}(\vec{\rho}) = (R_{rr} - R_{tt}) \cos \varphi \sin \psi \cos \psi;$$

$$R_{33}(\vec{\rho}) = (R_{rr} - R_{tt}) \cos^2 \psi + R_{tt}. \quad (8)$$

В несжимаемой жидкости  $R_{rr}$  и  $R_{tt}$  связаны соотношением Кармана:

$$R_{tt} = R_{rr} + 1/2 \rho R_{rr}'. \quad (9)$$

Воспользовавшись этим соотношением, можно установить зависимость  $|\overline{\Psi_1}|^2$  от  $\theta$  (индикатриса рассеяния), не конкретизируя вид функции  $R_{rr}(\rho)$ .

Введя обозначение

$$I_{ij}(\theta) = \int_V R_{ij}(\vec{\rho}) e^{2ik\rho \sin \frac{\theta}{2} \cos \psi} \rho^2 \sin \psi d\rho d\varphi d\psi, \quad (10)$$

мы можем записать выражение (6) в следующем виде:

$$|\overline{\Psi_1}|^2 = \frac{A_0^2 \omega^2 k_i k_j V}{(2\pi r c^2)^2} I_{ij}. \quad (11)$$

Если функции  $R_{rr}(\rho)$  и  $R_{tt}(\rho)$  достаточно быстро убывают с ростом  $\rho$  на протяжении объема  $V$ , то интегрирование по  $\rho$  в выражении (10) можно распространить от 0 до  $\infty$  (для этого необходимо выполнение условия  $V \gg l^3$ , где  $l$  — расстояние, на котором функция корреляции убывает в несколько раз).

Так как в  $R_{13}$  входит множитель  $\cos \varphi$ , то очевидно, что  $I_{13} = 0$ . Покажем теперь, что из соотношения (9) следует, что и  $I_{33} = 0$ . Подставив  $R_{33}$  из (8) в (10) и произведя интегрирование по  $\varphi$  и  $\psi$ , найдем, что

$$I_{33} = 4\pi \int_0^{\infty} \left\{ R_{rr}(\rho) \left[ \frac{\sin \alpha \rho}{\alpha \rho} + \frac{2 \cos \alpha \rho}{\alpha^2 \rho^2} - \frac{2 \sin \alpha \rho}{\alpha^3 \rho^3} \right] - R_{tt}(\rho) \left[ \frac{2 \cos \alpha \rho}{\alpha^2 \rho^2} - \frac{2 \sin \alpha \rho}{\alpha^3 \rho^3} \right] \right\} \rho^2 d\rho, \quad (12)$$

где  $\alpha = 2k \sin \frac{\theta}{2}$ . Подставив сюда  $R_{tt}(\rho) = R_{rr}(\rho) + \frac{1}{2} \rho R'_{rr}(\rho)$  и интегрируя члены, содержащие  $R'_{rr}(\rho)$ , по частям, найдем, что  $I_{33} = 0$ , если только  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho R_{rr}(\rho) = 0$ .

Таким образом,  $I_{13} = I_{33} = 0$ , так что (11) переходит в соотношение:

$$|\Psi_1|^2 = \frac{A_0^2 \omega^2 k^2 V}{(2\pi r c^2)^2} I_{11}(\theta) \cos^2 \frac{\theta}{2}. \quad (13)$$

Покажем теперь, что  $I_{11}(0) = I_{11}(\pi) = 0$ . Для этого проинтегрируем выражение для  $I_{11}(0) = I_{11}(\pi)$  по  $\varphi$  и  $\psi$  и снова воспользуемся соотношением (9). Получим, что  $I_{11}(0) = I_{11}(\pi) = 0$ , если только  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^3 R_{rr}(\rho) = 0$ .

Таким образом, из несжимаемости турбулентного движения жидкости следует, что индикатриса рассеяния звука имеет при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  провалы.

Для дальнейших вычислений необходимо конкретизировать вид функции  $R_{rr}(\rho)$ . Мы примем для нее следующее выражение

$$R_{rr}(\rho) = \frac{1}{3} \bar{u}^2 e^{-\rho/l}. \quad (14)$$

Здесь  $\bar{u}^2$  — среднее квадратичное пульсационной скорости потока и  $l$  — масштаб корреляции, характеризующий средний размер пульсаций.  $R_{tt}(\rho)$  мы можем найти из соотношения (9). Подставляя эти выражения в (10), находим  $I_{11}(\theta)$ . Для  $|\Psi_1|^2$  получаем (опуская промежуточные вычисления)

$$|\Psi_1|^2 = \frac{A_0^2 V \mu^2}{6\pi l r^2} \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 + \frac{1}{2k^2 l^2} - \cos \theta\right)^3}, \quad (15)$$

где  $\mu^2 = \bar{u}^2 / c^2$ . Этим выражением определяется индикатриса рассеяния.

На рис. 1 и 2 в качестве примеров приводятся две индикатрисы рассеяния, соответствующие значениям  $kl = 1/\sqrt{2}$  и  $kl = 10$ . При  $kl \gg 1$  почти все рассеяние направлено вперед. Максимум рассеяния при  $kl \gg 1$  приходится на направление  $\theta_0 = 1/\sqrt{2} kl$  и направленность рассеяния очень быстро растет с частотой. Эффективный поперечник рассеяния в телесный угол  $d\Omega$ , приходящийся на единицу проходимо падающей волной расстояния, найденный при помощи выражения (15), равен:

$$d\sigma = \frac{\mu^2}{6\pi l} \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 + \frac{1}{2k^2 l^2} - \cos \theta\right)^3} d\Omega. \quad (16)$$

Проинтегрировав выражение (16) по всем углам, найдем коэффициент рассеяния  $2\alpha$ :

$$2\alpha = \frac{\mu^2}{3l} \left[ \frac{4k^2 l^2 (1 + 2k^2 l^2)}{1 + 4k^2 l^2} - \ln(1 + 4k^2 l^2) \right]. \quad (17)$$

При  $kl \gg 1$  получаем отсюда:

$$2\alpha \cong \frac{2}{3l} \mu^2 (kl)^2. \quad (18)$$

Так как на высоких частотах основная доля рассеянной энергии направлена вперед, то нас может в этом случае интересовать доля энергии, рассеянная назад. Найдем соответствующий коэффициент рассеяния, который мы обозначим через  $2\alpha$ . При  $kl \gg 1$  получим:

$$2\alpha = \frac{\mu^2}{6\pi l} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 + \frac{1}{2k^2 l^2} - \cos \theta\right)^3} 2\pi \sin \theta d\theta \cong \frac{\mu^2}{3l} (1 - \ln 2) \approx 0,1 \frac{\mu^2}{l}. \quad (19)$$

Таким образом, коэффициент «рассеяния назад» при больших частотах делается постоянным. В том случае, когда нас интересуют фазо-

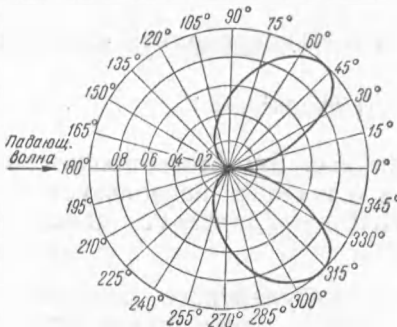


Рис 1.  $kl = 1/\sqrt{2}$

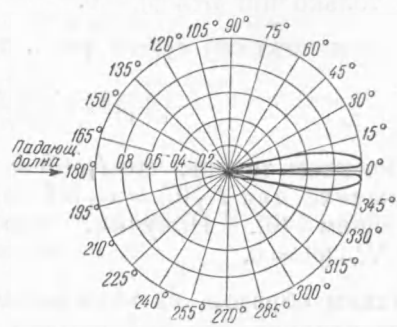


Рис 2.  $kl = 10$

вые соотношения в волне, мы должны взять за коэффициент рассеяния величину  $2\alpha$  (так как в рассеянной волне не соблюдаются фазовые соотношения). Если же принимаемая волна интересует нас лишь с энергетической точки зрения, то мы должны взять за коэффициент рассеяния значительно меньшую величину  $2\alpha$ .

Отметим здесь, что если в исходном уравнении (2) сохранить член, учитывающий ускорение потока, то это приводит к тому, что в выражении (15) для среднего квадрата амплитуды рассеянной волны появляется еще одно слагаемое:

$$\frac{V}{12\pi l_1 r^2} \frac{(\overline{w^2})}{(\omega^2 c^2)} \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\left(1 + \frac{1}{2k^2 l_1^2} - \cos \theta\right)^3}, \quad (20)$$

где  $\overline{w^2}$  — среднее квадратичное пульсаций ускорения и  $l_1$  — масштаб корреляции поля ускорений. При выводе выражения (20) функция

корреляции поля ускорений  $a_{ij}$  была взята в виде  $a_{ij}(\rho) = w_i(\mathbf{r})w_j(\mathbf{r} + \rho) = (a_{rr} - a_{tt})m_i m_j + a_{tt}\delta_{ij}$  и  $a_{tt}(\rho) = 1/3 \overline{w^2} e^{-\rho/l_1}$ , а  $a_{rr}$  была найдена из соотношения <sup>(3)</sup>  $a_{rr} = a_{tt} + \rho a_{tt}$ .

Вполне возможно, что рассеяние звука на поле ускорений может быть привлечено к объяснению затухания инфразвука при его распространении в атмосфере большего, чем дает теория поглощения за счет вязкости и теплопроводности.

Научно-исследовательский институт физики  
Московского государственного университета  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
22 II 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> А. Н. Обухов, ДАН, 30, № 7 (1941). <sup>2</sup> Л. Д. Ландау, Д. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., 1944. <sup>3</sup> А. М. Обухов, А. М. Яглом, Прикладн. матем. и мех., № 1 (1951).