

Член-корреспондент АН СССР А. А. ПИСТОЛЬКОРС

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ МАТЬЕ ДЛЯ РАСЧЕТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ПОЛЯ В АНТЕННЕ ПО ЗАДАННОЙ ДИАГРАММЕ
НАПРАВЛЕННОСТИ

Представим себе безграничный плоский идеально проводящий экран, в котором прорезано отверстие ширины d и бесконечной длины. Предположим, что это отверстие является раскрывом антенны.

Возьмем эллиптическую систему координат с фокусным расстоянием d (рис. 1), направим ось z по оси отверстия и совместим с экраном полуплоскости $\eta = 0$ и $\eta = \pi$. Тогда плоскость раскрыва антенны определится уравнением $\xi = 0$. Положим, что излучение антенны имеет место в верхнем полупространстве ($0 \leq \eta \leq \pi$).

Пусть в раскрыве существует электромагнитное поле угловой частоты ω , причем электрический вектор параллелен оси z и, следовательно, $E_\xi = E_\eta = 0$, $E_z = E$. На поверхности экрана $E = 0$; имея это в виду, выразим электрическое поле рассматриваемой антенны с помощью нечетных функций Матье $se_p(h, \eta)$, обращаясь в нуль при $\eta = 0$ и $\eta = \pi$; здесь $h = kd/4$ — параметр функции, $k = 2\pi/\lambda$ волновое число. Напомним, что

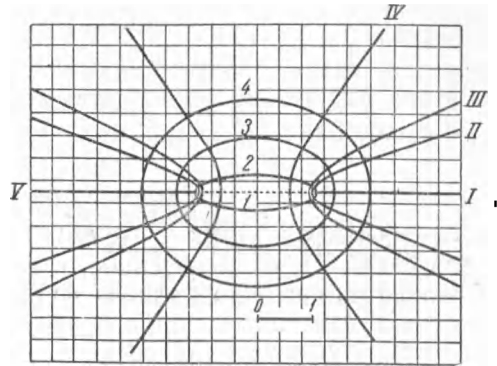


Рис. 1. I — $\text{ch } \xi = 1,00$; 2 — $\text{ch } \xi = 1,05$; 3 — $\text{ch } \xi = 1,4$; 4 — $\text{ch } \xi = 2$. I — $\eta = 0$; II — $\cos \eta = 0,94$, $\eta = 20^\circ$; III — $\cos \eta = 0,9$, $\eta = 26^\circ$; IV — $\cos \eta = 0,6$, $\eta = 53^\circ$; $\eta = \pi$

$$se_p(h, \eta) = \sum_{m=1,2}^{\infty} B_{p,m} \sin m\eta, \quad (1)$$

где коэффициенты $B_{p,m}$ являются функциями h и порядкового номера p ; суммирование производится по четным значениям m при p четном и наоборот.

Электрическое поле в любой точке полупространства, включая плоскость экрана, может быть представлено в виде бесконечного ряда

$$E = \sum_{p=1}^{\infty} g_p Hs_p^{(2)}(h, \xi) se_p(h, \eta), \quad (2)$$

где $Hs_p^{(2)}$ — нечетные функции Матье — Ганкеля второго рода порядка p ; g_p — постоянные коэффициенты (вообще говоря, комплексные), подлежащие определению.

В плоскости раскрыва при $\xi = 0$ поле будет:

$$E_0 = \sum_{p=1}^{\infty} g_p H_s^{(2)}(h, 0) \text{se}_p(h, \eta). \quad (3)$$

Как известно, при больших значениях ξ функции Матье — Ганкеля с точностью до постоянного множителя переходят в функции Ганкеля. Поэтому, при соответствующей нормировке функций Матье — Ганкеля, для очень больших расстояний от антенны можем написать

$$H_s^{(2)}(h, \xi) \approx H_p^{(2)}(he^{\xi}) \approx i^p \sqrt{\frac{2}{\pi he^{\xi}}} e^{-i(he^{\xi} - \pi/4)}.$$

Обозначая через r расстояние точки наблюдения от оси z и замечая, что $he^{\xi} = kr$, получим для больших r

$$E = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(hr - \pi/4)} \sum_{p=1}^{\infty} i^p g_p \text{se}_p(h, \eta). \quad (4)$$

Пусть на достаточно большом расстоянии от оси z поле цилиндрической волны обладает в плоскости $\xi\eta$ заданной диаграммой направленности $f(\eta)$ (т. е. заданной зависимостью от угла η при постоянном расстоянии r). Мы можем записать это в виде:

$$E = f(\eta) \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(hr - \pi/4)}. \quad (5)$$

Требуется найти соответствующее распределение поля в раскрыве. Для этого достаточно определить коэффициенты g_p .

Из выражения (4) видно, что

$$f(\eta) = \sum_{p=1}^{\infty} i^p g_p \text{se}_p(h, \eta), \quad (6)$$

и дело сводится, следовательно, к представлению заданной диаграммы направленности в виде ряда из функций Матье параметра h (соответствующего заданной ширине раскрыва). Заметим, что эти функции образуют ортогональную систему, в которой степень приближения будет определяться исключительно числом членов ряда и значения коэффициентов не будут зависеть от этого числа. Получить искомое разложение нетрудно, если диаграмма направленности задана в виде ряда Фурье $f(\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\eta$. Для определения коэффициента g_p умножим обе части равенства (6) на $\text{se}_p(h, \eta)$ и проинтегрируем их от 0 до 2π . Тогда, учитывая (1), получим в левой части

$$\int_0^{2\pi} f(\eta) \text{se}_p(h, \eta) d\eta = \pi \sum_{m=1,2}^{\infty} B_{p,m} b_m.$$

В правой же части, в силу ортогональности функций Матье, остается:

$$i g_p \int_0^{2\pi} \text{se}_p^2(h, \eta) d\eta = i^p g_p \pi.$$

Следовательно,

$$g_p = i^{-p} \sum_{m=1,2}^{\infty} B_{p,m} b_m. \quad (7)$$

Найдя коэффициенты g_p , мы тем самым определим поле во всем пространстве и, пользуясь выражением (3), сможем вычислить поле в

плоскости раскрыва. Чтобы перейти к декартовой координате x , следует иметь в виду, что в этой плоскости $x = d/2 \cos \eta$.

Итак, выражение для поля в раскрыве получается тоже в виде ряда из функций Матье, но с иными коэффициентами, чем у поля на бесконечности. Изменения в соотношении между амплитудами отдельных составляющих поля (гармоник Матье) определяются значениями функций $HS_p^{(2)}(h, 0)$, которые быстро

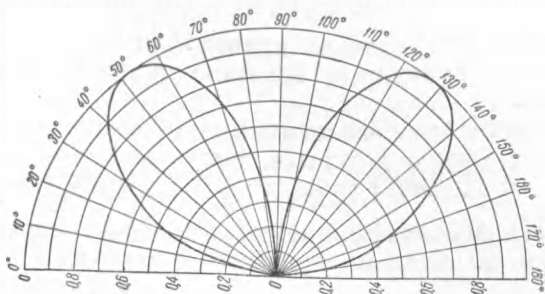


Рис. 2

растут, начиная с некоторого порядка p , тем более высокого, чем больше h (т. е. ширина антенны). Таким образом в излагаемом методе поле, заданное на бесконечности, трансформируется при помощи функций Матье — Ганкеля в некоторое «искаженное» поле в плоскости раскрыва. При этом может случиться, что составляющие (гармоники) поля, малые на бесконечности, станут значительно больше других в раскрыве. Значения функций Матье — Ганкеля $HS_p^{(2)}(h, 0)$, необходимые для вычисления поля в раскрыве, могут быть подсчитаны по следующим формулам (1)

$$HS_{2n+1}^{(2)}(h, 0) = i \frac{(-1)^n 2 \operatorname{se}_{2n+1}(h, \pi/2)}{\pi h B_{2n+1,1}}, \quad (8a)$$

$$HS_{2n+2}^{(2)}(h, 0) = \frac{i^{(-1)^{n+1}} \operatorname{se}'_{2n+2}(h, \eta)|_{\eta=\pi/2}}{\pi h^2 B_{2n+2,2}}. \quad (8б)$$

Для вычисления производной можно пользоваться рядом

$$|\operatorname{se}'_{2n+2}(h, \eta)|_{\eta=\pi/2} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m B_{2n+2,2m}. \quad (8в)$$

Как видим, для применения излагаемого метода достаточно иметь таблицы функций Матье разных порядков или их коэффициентов для различных параметров h . Такие таблицы для значений h от 1 до $\sqrt{10}$ (а для коэффициентов $B_{p,m}$ и до $\sqrt{40}$) составлены Айнсом (2).

Приведем пример применения метода. Пусть требуется получить диаграмму направленности, заданную функцией

$$f(\eta) = \frac{\sin(\pi \cos \eta)}{\sin \eta} \quad (9)$$

и изображенную на рис. 2. Как известно, эта диаграмма соответствует синусоидальному распределению поля в раскрыве шириной λ , где λ — длина волны. Возьмем две различные антенны с раскрывами шириной $1,27\lambda$ ($h=2$) и $0,637\lambda$ ($h=1$) и найдем требуемое распределение поля. Разлагая диаграмму направленности (9) в ряд Фурье, получим:

$$f(\eta) = 1,138 \sin 2\eta - 0,1950 \sin 4\eta + 0,01388 \sin 6\eta - 0,0050 \sin 8\eta + \dots \quad (10)$$

Пользуясь формулой (7), найдем соответствующие коэффициенты разложения в ряд по функциям Матье для более широкой антенны ($h=2$):

$$f(\eta) = 1,144 \operatorname{se}_2(2, \eta) + 0,156 \operatorname{se}_4(2, \eta) + 0,00282 \operatorname{se}_6(2, \eta) + \dots \quad (11)$$

Пользуясь выражениями (86) и (3), получим для электрического поля в раскрыве

$$E_{0z} = -i \cdot 0,636 \operatorname{se}_2(2, \eta) + i \cdot 0,366 \operatorname{se}_4(2, \eta) - i \cdot 0,1175 \operatorname{se}_6(2, \eta) + \dots$$

Соответствующая кривая для половины раскрыва представлена на рис. 3; пунктиром показано точное (синусоидальное) распределение поля.

Вычисляя аналогичным образом распределение поля для вдвое более узкого раскрыва, получим:

$$E_{0,1} = -i \cdot 1,72 \operatorname{se}_2(1, \eta) + i \cdot 3,20 \operatorname{se}_4(1, \eta) - i \cdot 14,64 \operatorname{se}_6(1, \eta) + \dots$$

Здесь все коэффициенты выросли; вторая и особенно третья гармоники значительно превышают первую, что происходит за счет резкого возрастания значения функций Матье — Ганкеля соответствующих порядков.

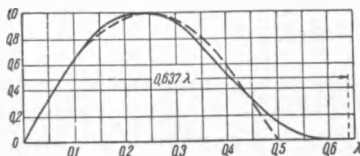


Рис. 3

На рис. 4 изображены кривые для трех членов ряда (II) и для двух (I). Заметим, что масштабы для них взяты разные. Пиковое значение поля возрастает в 18 раз для кривой II и в 4,5 раза для кривой I по сравнению

с предыдущим случаем (синусоидального распределения). Практически не имеет смысла брать три члена ряда, так как и при двух точность воспроизведения заданной диаграммы оказывается вполне достаточной.

Приведенный пример наглядно иллюстрирует свойства антенн с уменьшенным раскрывом (так называемых малогабаритных), а именно: рост пиковых значений поля, особенно при попытках увеличить точность воспроизведения диаграммы направленности, и переменнo-фазный характер кривой распределения поля. Одновременно он позволяет оценить те возможности, которые открывает излагаемый метод в отношении нахождения разумного компромисса между точностью воспроизведения заданной $f(\eta)$ и максимальными значениями напряженности поля в раскрыве. Заметим, что на основании принципа двойственности кривые рис. 3 и 4 будут справедливы и для распределения плотности тока, если вместо щели взять бесконечную ленту той же ширины.

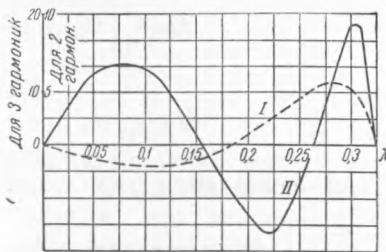


Рис. 4. I — 2 гармоники, II — 3 гармоники

Излагаемый метод приводит к выводу, что точное воспроизведение заданной диаграммы направленности (при заданной ширине раскрыва) возможно в двух случаях: 1) когда диаграмма направленности задана в виде конечного ряда функций Матье параметра h , не превышающего заданный; 2) когда диаграмма задана в виде бесконечного ряда из функций Матье параметра h не выше заданного, причем соответствующий ему ряд (3) стремится к конечному пределу. Если ряд (3) при заданной ширине раскрыва не стремится к пределу или расходится, требуемая диаграмма направленности может быть воспроизведена лишь приближенно с точностью, допускаемой предельными значениями напряженности поля в антенне.

Поступило
4 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ N. W. McLachlan, Theory and Applications of Mathieu Functions, Oxford, 1947, стр. 249. ² М. Д. О. Стретт, Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике, 1935.