

М. П. ЩЕГЛОВ

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 III 1953)

Литтльвуд сформулировал следующую теорему ((¹), стр. 197, теорема 92, стр. 221, § 7.5):

Пусть последовательность $\{s_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) является ограниченной, т. е. $s_n = O(1)$, и суммируется методом Пуассона:

$$\varphi(u) = \frac{1}{u} \sum_{v=0}^{\infty} s_v e^{-v/u} \rightarrow S \quad \text{при } 0 < u \rightarrow \infty,$$

где S — любое конечное число.

Тогда заданная последовательность $\{s_n\}$ суммируется и методом Чезаро:

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n s_v \rightarrow S \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

В настоящей заметке даются некоторые аналоги и обобщения теоремы Литтльвуда.

Введем основные понятия и основные соотношения.

Возьмем числа

$$\overline{\lim} s_n = \underline{D}_0; \quad \overline{\lim} \sigma_n = \underline{D}_1; \quad \overline{\lim} \varphi(u) = \underline{D}_2, \quad (\alpha)$$

где $n \rightarrow \infty$, $u \rightarrow \infty$, причем верхние (нижние) черточки левой части соответствуют верхним (нижним) черточкам правой части каждого равенства. Эти числа (конечные, так как берется класс ограниченных последовательностей) связаны соотношением ((³), стр. 46—50)

$$-\infty < \underline{D}_0 \leq \underline{D}_1 \leq \underline{D}_2 \leq \overline{D}_2 \leq \overline{D}_1 \leq \overline{D}_0 < +\infty. \quad (\Lambda)$$

Назовем ω -числами следующие разности:

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= \underline{D}_i - \underline{D}_j, \quad i > j; \\ \omega^{ij} &= \overline{D}_i - \overline{D}_j, \quad i < j; \\ \omega_j^i &= \overline{D}_i - \underline{D}_j, \quad i \neq j; \end{aligned} \quad (\omega)$$

(всюду $i, j = 0, 1, 2$).

Согласно определению, все ω — неотрицательные числа. Среди ω -чисел выделяется основная монотонная «цепочка»:

$$0 \leq \omega_2^2 \leq \omega_1^1 \leq \omega_0^0 < \infty. \quad (\Omega)$$

Теорема Литтльвуда на «языке ω -чисел» формулируется следующим образом:

Пусть последовательность $\{s_n\}$ ограничена и пусть $\omega_2^2 = 0$; тогда $\omega_1^1 = 0$.

Имеет место следующий аналог этой теоремы:

Теорема 1. Пусть $s_n = O(1)$ и $\omega_{10} = 0$ (или $\omega^{01} = 0$); тогда $\omega_{21} = 0$ (или $\omega^{12} = 0$).

В основу доказательства теоремы положена лемма, имеющая и самостоятельный интерес.

Лемма. Пусть $s_n = O(1)$. Для того чтобы $\omega_{10} \equiv \underline{D}_1 - \underline{D}_0 = 0$ (или $\omega^{01} \equiv \overline{D}_0 - \overline{D}_1 = 0$), необходимо и достаточно, чтобы существовали последовательности сегментов $\{[n_k, n'_k]\}$ ($k = 1, 2, \dots$) и чисел N^* , удовлетворяющие условиям:

а) $0 < n_k < n'_k < n_{k+1} \rightarrow \infty$, $n'_k / n_k \rightarrow \infty$, $n_k \in N$, $n'_k \in N$; $N^* \subset N$, где $N = \{n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$);

б) $s_n \rightarrow \underline{D}_0$ (или $s_n \rightarrow \overline{D}_0$) при $n \rightarrow \infty$, $n \in N^*$;

в) $\overline{\lim}_{n_k \rightarrow \infty} \frac{n_k^*}{n_k - n_k} = 1$, где n_k^* — число чисел последовательности N^* , принадлежащих сегменту $[n_k, n'_k]$.

Эта теорема необратима; так, например, легко построить последовательность $\{s_n\}$ такую, что $s_n = O(1)$, $\omega_{21} = 0$, $\omega_{10} \neq 0$.

Теперь рассмотрим отношения ω -чисел.

Нас интересует величина

$$\delta = \sup_L \left\{ \frac{\omega'}{\omega} \right\}, \text{ где } \omega \neq 0;$$

ω, ω' берется каждое с фиксированными индексами i, j ; под L здесь, как и везде в дальнейшем, будем понимать совокупность всех ограниченных последовательностей $\{s_n = O(1)\}$.

Теорема 2. δ принимает только значения $1, e, \infty$.

Случай $\delta = 1$ реализуется во всех случаях, для которых постоянно $\omega' \leq \omega$. Относительно элементов «цепочки» (Ω) имеет место следующая теорема:

Теорема 3.

$$\text{а) } \sup_L \left\{ \frac{\omega_2^2}{\omega_0^0} \right\} = 1; \quad \text{б) } \sup_L \left\{ \frac{\omega_1^1}{\omega_2^2} \right\} = e; \quad \text{в) } \sup_L \left\{ \frac{\omega_0^0}{\omega_1^1} \right\} = \infty.$$

Рассмотрим взаимосвязь последовательности $\{s_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и функции $\varphi(u)$ ($0 < u < \infty$) со своими собственными соответствующими подпоследовательностями $\{\sigma_{n_k}\}$ и $\varphi(u_k)$, где

$$0 < n_k < n_{k+1} \rightarrow \infty, \quad \frac{n_{k+1}}{n_k} \rightarrow 1; \quad (\text{а}_1)$$

$$0 < u_k < u_{k+1} \rightarrow \infty, \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} \rightarrow 1. \quad (\text{а}_2)$$

Теорема 4. Для последовательности $\{s_n\} \in L$ имеют место*:

$$\overline{\lim} \sigma_{n_k} = \overline{\lim} s_n; \quad (\text{А}_1)$$

$$\overline{\lim} \varphi(u_k) = \overline{\lim} \varphi(u) \quad (\text{А}_2)$$

при соответствующих условиях (а₁) и (а₂).

* В (А₁) и (А₂) верхняя черточка соответствует верхней, нижняя — нижней.

Основой доказательства теоремы служит следующая лемма:

Лемма. Если $\{s_n\} \in L$, то последовательность $\{\tau_n\}$ и функция $\varphi(u)$ медленно колеблющаяся.

Можно показать, что условия (a_1) и (a_2) для теоремы 4 являются наилучшими и не допускают разряжений «плотности» последовательностей $\{n_k\}$ и $\{u_k\}$.

Из этой теоремы в качестве частного случая вытекает:

Теорема 5. Пусть $\{s_n\} \in L$; тогда:

I. Если $\sigma_{n_k} \rightarrow S$ при условии (a_1) , то $\sigma_n \rightarrow S$.

II. Если $\varphi(u_k) \rightarrow S$ при условии (a_2) , то $\varphi(u) \rightarrow S$ (S — любое конечное число).

В случае I условие (a_1) является наилучшим — класс последовательностей $\{n_k\}$ не допускает расширения.

Для случая II условие (a_2) можно улучшить. Полученные в этом направлении результаты мы сформулируем в форме обобщения указанной теоремы Литтльвуда.

Теорема 6. Пусть дано:

1°. $\{s_n\} \in L$.

2°. $\varphi(u_k) \rightarrow S$, где S — любое конечное число и $u_k \rightarrow \infty$ по последовательности $\{u_k\}$, обладающей свойствами:

$$a) 0 < u_k < u_{k+1} \rightarrow \infty \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad 1 \leq \overline{\lim}_{u_k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} < \infty;$$

б) существует подпоследовательность $\{u_{k_s}\} \subset \{u_k\}$ ($s = 0, 1, 2, \dots$),

для которой $\underline{\lim}_{u_{k_s}} \frac{u_{k_{s+1}}}{u_{k_s}} > 1$ при $k_s \rightarrow \infty$ ($s = 0, 1, 2, 4, \dots$);

$$в) \frac{u_{k+1}}{u_k} \rightarrow 1 \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad k \in \{[k_s, k_{s+1})\} \quad (s = 0, 2, 4, \dots).$$

При этих условиях $\sigma_n \rightarrow S$.

Доказательство. Используем (с некоторыми изменениями) метод доказательства теоремы 3, приведенный в работе (2), стр. 247. Последовательность $\{u_k\}$, определяемая свойствами а), б), в), является наилучшей.

Поступило
21 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Г. Харди, Расходящиеся ряды, 1951. ² М. П. Шеглов, Матем. сборн., 28, (70): 2 (1954). ³ А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.