Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 2

МАТЕМАТИКА

Действительный член АН Арм.ССР А. Л. ШАГИНЯН

О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ГАРМОНИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

В теории чебышевских приближений функций одного аргумента, вещественного либо комплексного, часто применяется неравенство, позволяющее оценить производную многочлена, обычного либо тригонометрического, по заданному максимуму модуля многочлена на данной совокупности ([1], [2]).

В настоящее время имеются результаты, которые дают возможность установить такого же рода неравенства для пространственных гармонических многочленов и тем самым решить некоторые задачи чебышевских приближений в пространстве.

Теорема 1. *Если $H_n(x, y, z)$ — гармонический многочлен степени n и на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$*

$$|H_n(x, y, z)| \leqslant M,$$

то в любой точке замкнутого шара

$$\left|\frac{\partial^p H_n}{\partial l_1 \partial l_2 \ldots \partial l_p}\right| \leqslant C\frac{M}{\rho^p} n^p, \tag{1}$$

где $l_1, l_2, \ldots, l_p$ — произвольные направления, а C — постоянная, зависящая, возможно, от p.

Доказательство. Рассмотрим частный случай $\rho = 1$, заметив, что общий случай получится из него элементарным преобразованием.

На окружности любого большого круга $H_n(x, y, z)$ обращается в обычный тригонометрический многочлен порядка n относительно центрального угла этой окружности. Поэтому ([2])

$$\left|\frac{\partial^p H_n}{\partial s^p}\right| \leqslant M n^p, \tag{2}$$

где ds — элемент дуги нормального сечения. В частности,

$$\left|\frac{\partial^p H_n}{\partial \varphi^p}\right| \leqslant M n^p, \quad \left|\frac{\partial^p H_n}{\partial \vartheta^p}\right| \leqslant M n^p,$$

φ и ϑ — полярные углы.

Оценим теперь нормальную производную $\partial H_n / \partial r$. Представим H_n в виде

$$H_n = Y_0 + Y_1 r + \ldots + Y_n r^n,$$

где $\{Y_k\}$ — сферические функции

$$\frac{\partial H_n}{\partial r} = Y_1 + 2r Y_2 + \ldots + n r^{n-1} Y_n,$$

а на единичной сфере

$$H_n|_{r=1} = Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_n.$$

Обозначим отрезки последней суммы через

$$s_k = Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда

$$\left.\frac{\partial H_n}{\partial r}\right|_{r=1} = s_1 - s_0 + 2(s_2 - s_1) + \ldots + n(s_n - s_{n-1}) =$$
$$= n\left(s_n - \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n}\right). \quad (3)$$

Но известно, что если $f(P)$ — произвольная ограниченная и измеримая функция на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, то

$$\left|\frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n}\right| \leqslant CM,$$

где C — абсолютная постоянная, а $M = \max|f(P)|$ на сфере [3] *.

Следовательно, из (3) получим

$$\left|\frac{\partial H_n}{\partial r}\right|_{r=1} \leqslant (1 + C)Mn.$$

Для оценки второй производной $\partial^2 H_n/\partial r^2$ пользуемся равенством Лапласа в полярных координатах

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial \varphi^2} + \sin^2 \vartheta \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_n}{\partial r}\right) + \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial H_n}{\partial \vartheta}\right) = 0.$$

В этом равенстве оценены все производные, кроме $\partial^2 H_n/\partial r^2$, которую можно оценить, направив предварительно координатную систему так, чтобы в точке, где производится оценка, было $\vartheta = \pi/2$. Получаем:

$$\left|\frac{\partial^2 H_n}{\partial r^2}\right| \leqslant CMn^2,$$

где C — новая постоянная, не зависящая от n и H_n.

Для оценки производных порядка >2 достаточно дифференцировать равенство Лапласа по r и применить предыдущие оценки. Таким путем получим

$$\left|\frac{\partial^p H_n}{\partial r^p}\right| \leqslant CMn^p, \quad (4)$$

а из неравенств (2) и (4) вытекает (1).

В самом деле, оценим сначала $\partial H_n/\partial x$, $\partial H_n/\partial y$, $\partial H_n/\partial z$ в произвольной точке A сферы. Проведем для этого плоскость через A и ось Ox. Тогда

$$\frac{\partial H_n}{\partial x} = \frac{\partial H_n}{\partial r}\cos(r; Ox) + \frac{\partial H_n}{\partial s}\cos(\mathbf{s}; Ox),$$

где ∂s — элемент дуги этого сечения, а $\mathbf{s}$ — направление касательной к ней в точке A. Из этого равенства вытекает

$$\left|\frac{\partial H_n}{\partial x}\right| \leqslant CMn.$$

Точно такие же неравенства получим для $\partial H_n/\partial y$ и $\partial H_n/\partial z$.

* В указанной статье Гронвалем оценена постоянная Лебега для средних Чезаро ряда Лапласа. C и есть эта постоянная.

Из гармоничности этих производных и из принципа максимума следует, что везде в единичном шаре

$$\left|\frac{\partial H_n}{\partial x}\right| \leqslant CMn, \quad \left|\frac{\partial H_n}{\partial y}\right| \leqslant CMn, \quad \left|\frac{\partial H_n}{\partial z}\right| \leqslant CMn.$$

Таким же путем оцениваем смешанные производные любого порядка $\partial^p H_n/\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}\partial z^{p_3}$, $p = p_1 + p_2 + p_3$. Получаем

$$\left|\frac{\partial^p H_n}{\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}\partial z^{p_3}}\right| \leqslant CMn^p.$$

Но произвольная смешанная производная $\partial^p H_n/\partial l_1 \partial l_2 \ldots \partial l_p$ по направлениям $l_1, l_2, \ldots, l_p$ выражается линейным образом через $\partial^k H_n/\partial x^{p_1}\partial y^{p_2}\partial z^{p_3}$ $(k = p_1 + p_2 + p_3)$ и ограниченные коэффициенты, зависящие от углов между координатными осями, поэтому неравенство (1) можно считать доказанным.

Из теоремы 1 вытекает:

Следствие. *Если S — замкнутая гладкая поверхность и главные кривизны $1/R_1$ и $1/R_2$ в произвольной точке A удовлетворяют условию*

$$\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \leqslant \text{пост.},$$

то из условия $|H_n| \leqslant M$ на S вытекает

$$\left|\frac{\partial^p H_n}{\partial l_1, \partial l_2, \ldots, \partial l_p}\right| \leqslant CMn^p$$

везде в замкнутой области. C — постоянная, зависящая от p и от $\min(R_1, R_2)$; $C < \frac{C_1}{\min(R_1, R_2)}$, где C_1 зависит лишь от p.

Применим полученные неравенства к вопросу о наилучших приближениях. Не приводя доказательства, сформулируем результат, который получается таким же путем, что и соответствующая теорема у Валле-Пуссена [4] в теории приближений функций от одного аргумента.

Теорема 2. *Если $f(P)$ — произвольная непрерывная функция на замкнутой гладкой поверхности S, удовлетворяющей условию*

$$\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \leqslant \text{пост.},$$

и наилучшее приближение $f(P)$ на S (гармоническими многочленами) удовлетворяет условию

$$E_n(f) < \frac{\omega(n)}{n^p}, \tag{5}$$

где $\omega(x)$ — не возрастающая начиная с некоторого x и $\omega(x) \to 0$ при $x \to \infty$, а также

$$\int^{\infty} \frac{\omega(x)}{x}\, dx < \infty, \tag{6}$$

то $f(P)$ является граничным значением непрерывной в замкнутой области и гармонической внутри функции $F(P)$, допускающей в замкнутой области производную $\partial^p F/\partial l_1 \partial l_2 \ldots \partial l_p$ с модулем непрерывности

$$\omega(\delta) \leqslant \alpha\left[\delta \int_a^{a/\delta} \omega(x)\, dx + \int_{1/\delta}^{\infty} \frac{\omega(x)}{x}\, dx\right], \tag{7}$$

где α и a — постоянные, не зависящие от δ.

Следуя Валле-Пуссену, можно доказать, что:

Если на поверхности S в условии теоремы 2 удовлетворяется одно из условий:

$$E_n(f) < \begin{cases} \dfrac{C}{n^{p+\alpha}}, & 0 < \alpha < 1; \\ \dfrac{C}{n^p (\lg n)^\alpha}, & \alpha > 0; \\ \dfrac{C}{n^{p+1}}, & \end{cases}$$

то $f(P)$ является граничным значением гармонической внутри S и непрерывной в замкнутой области функции $F(P)$, допускающей непрерывные в замкнутой области производные $\partial^p F/\partial l_1 \ldots \partial l_p$ по любым направлениям $l_1, l_2, \ldots, l_p$, и эти производные будут иметь модуль непрерывности $\omega(\delta)$, удовлетворяющий, соответственно, условиям

$$\omega(\delta) < \begin{cases} C\delta^\alpha; \\ \dfrac{C}{|\lg \delta|^\alpha}; \\ C\delta |\lg \delta|. \end{cases}$$

Сформулируем теперь теорему, обратную по отношению к предыдущим. Ограничимся случаем единичной сферы.

Теорема 3. *Если $F(P)$ — гармоническая внутри шара D и $\partial F/\partial r^p$ непрерывна в замкнутой области, а $\omega(\delta)$ — ее модуль непрерывности, то в $\overline{D}$*

$$E_n(F) < C\left(\frac{\lg n}{n}\right)^p \omega\left(\frac{\lg n}{n}\right).$$

Наконец, отметим одно следствие из предыдущих теорем, представляющее и самостоятельный интерес.

Теорема 4. *Если $F(x, y, z)$ — гармоническая в шаре функция, имеющая непрерывную в замкнутой области производную $\partial^p F/\partial r^p$ с модулем непрерывности $\omega(\delta)$ и*

$$\int^{\infty} \frac{(\lg x)^p \,\omega\left(\dfrac{\lg x}{x}\right)}{x}\, dx < \infty,$$

то и всевозможные производные порядка p будут непрерывны в замкнутой области. Можно оценить модуль непрерывности $\omega^*(\delta)$ производной $\partial^p F/\partial l_1 \ldots \partial l_p$.

В частности, если $\omega(\delta) < \delta^\alpha, \alpha > 0$, то

$$\omega^*(\delta) < C\delta |\lg \delta|^{p+\alpha}.$$

Если же предыдущий интеграл расходится, то можем утверждать непрерывность смешанных производных до порядка $p-1$ включительно.

Для доказательства достаточно применить последовательно теоремы 2 и 4.

Замечание. Все предыдущее справедливо и при аппроксимации в плоских областях. Надо лишь в доказательстве теоремы 1 вместо неравенства Гронваля применить известное неравенство Фейера.

Сектор математики и механики
Академии наук Арм.ССР

Поступило
13 III 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Марков, Избр. тр., М.—Л., 1948, стр. 51—57. [2] С. Н. Бернштейн, Собр. соч., 1, изд. АН СССР, М.—Л., 1952, стр. 151—156. [3] T. H. Gronwall, Math. Ann., 74, 213 (1913). [4] Ch. J. de la Vallée-Poussin, Leçons sur l'approximation..., Paris, 1919, стр. 536.