Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 2

МАТЕМАТИКА

А. Е. ЛИБЕР

К ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 14 III 1953)

Множество всех одномерных подпространств B_1 векторного $n+1$-мерного пространства B_{n+1} будем называть псевдовекторным $n+1$-мерным пространством и обозначать $\mathfrak{B}_{n+1}$. Каждое подпространство B_1 однозначно определяется любым своим элементом $\mathfrak{x}$, отличным от нуля; такой элемент, вместе с тем, определяет базис подпространства B_1. Фиксируя базис в пространстве B_{n+1}, мы находим компоненты $\mathfrak{x}^i$ $(i=1, 2, \ldots, n+1)$ указанного базисного элемента подпространства B_1. При преобразовании базиса в B_{n+1} компоненты $\mathfrak{x}^i$ преобразуются как компоненты контравариантного вектора в B_{n+1}; при преобразовании базиса в B_1 компоненты $\mathfrak{x}^i$ преобразуются как контравариантные векторы в одномерном пространстве, т. е. умножаются на число. Векторное k-мерное пространство можно рассматривать как геометрическое пространство, изоморфное центрально-аффинному k-пространству E_k. Так, пространство B_{n+1} изоморфно E_{n+1}, а подпространство B_1 изоморфно пространству E_1, являющемуся центрированной прямой в E_{n+1} (т. е. прямой, проходящей через центр E_{n+1}). Поэтому псевдовекторное пространство $\mathfrak{B}_{n+1}$ при указанном изоморфизме отображается на множество всех центрированных прямых пространства E_{n+1}. Система чисел $\mathfrak{x}^i$, определяющая подпространство B_1, очевидно, определяет контравариантный псевдовектор в E_{n+1}; однако, на основании сказанного выше, можно рассматривать псевдовектор $\mathfrak{x}^i$ как связующий аффинор [1] двух центрально-аффинных пространств E_{n+1} и E_1, являющийся контравариантным вектором в E_{n+1}, компоненты которого суть скалярные плотности веса -1 в E_1 (ибо в одномерном пространстве контравариантный вектор совпадает со скалярной плотностью веса -1). Эта точка зрения на псевдовекторы в произвольном центрально-аффинном k-пространстве E_k распространяется вообще на любые псевдоаффиноры и дает простое обоснование алгебраических действий с псевдоаффинорами и ковариантного дифференцирования псевдоаффиноров[2]; последнее есть не что иное, как базисное ковариантное дифференцирование в составных многообразиях $E_k(X_k)$ и $E_1(X_k)$[3]. Этим мы в дальнейшем будем пользоваться (см. соотношения (1), (2) и (5)).

Арифметизация проективного n-пространства P_n осуществляется взаимно-однозначным отображением P_n на псевдовекторное пространство $\mathfrak{B}_{n+1}$, при этом компоненты связующего аффинора (псевдовектора) $\mathfrak{x}^i$ служат однородными координатами точки проективного n-пространства P_n. Использование псевдовекторного пространства $\mathfrak{B}_{n+1}$ удобно в том отношении, что переход к сопряженному $n+1$-мерному векторному пространству и соответствующему псевдовекторному пространству позволяет получать одновременно результаты для двойственных образов в P_n. Поэтому мы ограничимся в последующем изучением только точечных образов в P_n.

Поверхность m измерений S (m-поверхность) в P_n определяется с помощью отображения $\mathfrak{X}(\eta^a)$ $(a, b, c, d, e = 1, \ldots, m)$ некоторой области арифметического m-пространства в псевдовекторное пространство $\mathfrak{B}_{n+1}$, причем предполагается, что относительно постоянного базиса в B_{n+1} и некоторых постоянных базисов в соответствующих B_1 компоненты $\mathfrak{X}^i(\eta^a)$ являются функциями от η^a класса C_N и, кроме того, $\mathfrak{L}^{ii_1\ldots i_m} \neq 0$ (где $\mathfrak{L}^{ii_1\ldots i_m} = \mathfrak{X}^{[i}\, \partial_1 \mathfrak{X}^{i_1} \cdots \partial_m \mathfrak{X}^{i_m]}$, $\partial_a = \partial / \partial \eta^a$). Перемена базисов в соответствующих B_1 влечет умножение компонент связующего аффинора $\mathfrak{X}(\eta^a)$ на число $\varphi(\eta^a)$; мы ограничимся такими преобразованиями базисов, при которых функция $\varphi(\eta^a)$ также принадлежит классу C_N. Допуская регулярные преобразования $\eta^{a'} = f^{a'}(\eta^a)$, мы ассоциируем с m-поверхностью S геометрическое m-пространство X_m. Величина $\mathfrak{L}^{ii_1\ldots i_m}$, очевидно, является контравариантным простым псевдо-$m+1$-вектором и определяет поэтому $m+1$-мерное векторное подпространство B_{m+1}, которое мы назовем соприкасающимся подпространством; ему соответствует в P_n касательная m-плоскость к m-поверхности S.

С каждой точкой η^a m-поверхности S сопоставляется радиальное пространство E_1, изоморфное подпространству B_1, определенному величиной $\mathfrak{X}(\eta^a)$; мы получаем, таким образом, радиальное составное многообразие $E_1(X_m)$ ([3]). Если в радиальном $E_1(X_m)$ задана изоморфная (т. е. линейная аффинная) связность ([3]) с помощью объекта γ_a этой связности, то m независимых псевдовекторов $\mathfrak{X}_a = \partial_a \mathfrak{X} + \gamma_a \mathfrak{X}$ определяют подпространство B_m, которое назовем касательным подпространством. Касательное B_m изоморфно локальному касательному E_m ассоциированного пространства X_m. Очевидно, соприкасающееся подпространство B_{m+1} может быть разложено в прямую сумму радиального и касательного подпространств: $B_{m+1} = B_1 + B_m$. Обратно, задание подобного разложения соприкасающегося подпространства в прямую сумму определяет некоторый объект линейной аффинной связности в радиальном $E_1(X_m)$. Так как задание касательного подпространства равносильно заданию второй нормали в смысле А. П. Нордена ([4]), то задание линейной аффинной связности в радиальном составном многообразии оказывается равносильно заданию второй нормали (в смысле А. П. Нордена) m-поверхности в P_n.

Будем говорить, что задано оснащение m-поверхности S, если с каждой точкой η^a сопоставляется разложение пространства B_{n+1} в прямую сумму $B_{n+1} = B_{m+1} + B_{n-m}$, где B_{m+1} есть соприкасающееся подпространство и B_{n-m} — оснащающее подпространство. Так как B_{n-m} изоморфно E_{n-m}, то при наличии оснащения с каждой точкой η^a m-поверхности S сопоставляется некоторое E_{n-m}, что приводит к оснащаемому составному многообразию $E_{n-m}(X_m)$. Если кроме оснащения задана также линейная аффинная связность в радиальном составном многообразии $E_1(X_m)$, то m-поверхность S будем называть дооснащенной. С каждой точкой η^a дооснащенной m-поверхности сопоставляется разложение B_{n+1} в прямую сумму: $B_{n+1} = B_1 + B_m + B_{n-m}$ радиального, касательного и оснащающего подпространств, поэтому дооснащенная m-поверхность является нормализованной ([4]) и обратно. Пусть $\mathfrak{n}_p$ $(p, q = 1, \ldots, n-m)$ — базис оснащающего подпространства B_{n-m}; тогда $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_a$, $\mathfrak{n}_p$ образуют базис в B_{n+1}, по которому можно разложить псевдовекторы $\mathfrak{X}_{ab} = \partial_a \mathfrak{X}_a + \gamma_a \mathfrak{X}_b$ и векторы $\partial_a \mathfrak{n}_p$. Коэффициенты Γ_{ab}^c при $\mathfrak{X}_c$ в разложении $\mathfrak{X}_{ab}$ по указанному базису образуют объект линейной аффинной связности в касательном составном многообразии $E_m(X_m)$; легко проверить, что эта связность без кручения. Аналогично, коэффициенты Γ_{ap}^{q} при $\mathfrak{n}_q$ в разложении $\partial_a \mathfrak{n}_p$ по указанному базису определяют объект линейной аффинной связности в оснащающем составном многообразии $E_{n-m}(X_m)$. Используя объекты γ_a, Γ_{ab}^{c} и Γ_{ap}^{q} для базисного ковариантного дифференцирования ([3]) в соответствующих составных многообразиях и распространяя операцию базисного ковариантного дифференцирования на связующие величины, мы получаем деривационные формулы для дооснащенной m-поверхности в P_n в следующем виде:

$$D_a \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_a, \quad D_a \mathfrak{x}_b = h_{ab}^{p} \mathfrak{n}_p + g_{ab} \mathfrak{x}, \quad D_a \mathfrak{n}_p = h_{ap}^{e} \mathfrak{x}_e + w_{ap} \mathfrak{x}. \tag{1}$$

Распространяя тождества для второй альтернированной базисной ковариантной производной ([3]) на связующие аффиноры, получаем условия интегрируемости системы (1):

$$\begin{gathered}\tilde{R}_{ab} = 2g_{[ab]}, \quad h_{[ab]}^{p} = 0, \quad D_{[a}h_{b]c}^{p} = 0, \\ R_{abc}{}^{d} = 2h_{[a|c|}{}^{p}\, h_{b]p}{}^{d} - 2\delta_{[a}^{d}\, g_{b]c} + 2g_{[ab]}\,\delta_{c}^{d}, \quad D_{[a}h_{b]p}^{e} + \delta_{[a}^{e} w_{b]p} = 0, \\ R_{abp}{}^{q} = 2h_{[a|p|}{}^{e}\, h_{b]e}^{q}, \quad D_{[a}\, g_{b]c} + h_{[b|c|}{}^{p}\, w_{a]p} = 0, \quad D_{[a}\, w_{b]p} + h_{[b|p|}^{e} g_{a]e} = 0,\end{gathered} \tag{2}$$

где $\tilde{R}_{ab}$, $R_{abc\cdot}{}^{d}$ и $R_{abp\cdot}{}^{q}$ — аффиноры кривизны связностей в радиальном, касательном и оснащающем составных многообразиях, соответственно. Отсюда: *заданием объектов* γ_a, Γ_{ab}^{c}, Γ_{ap}^{q} *и связующих аффиноров* h_{ab}^{p}, h_{ap}^{e}, g_{ab}, w_{ap}, *удовлетворяющих условиям* (2), *дооснащенная* m-*поверхность в* P_n *определяется с точностью до автоморфизмов проективного пространства.* Следовательно, указанные объекты образуют фундаментальную систему объектов дооснащенной m-поверхности в P_n.

Теперь для построения геометрии произвольной m-поверхности S в P_n нужно указать инвариантную, т. е. определяемую самой m-поверхностью, линейную аффинную связность в радиальном составном многообразии и также инвариантное оснащение, иначе говоря, нужно определить *инвариантное дооснащение* m-поверхности. Пусть объект γ_a и подпространство B_{n-m} определяют некоторое дооснащение m-поверхности S, а объект ${}^{*}\gamma_a$ и подпространство ${}^{*}B_{n-m}$ определяют другое дооснащение m-поверхности S; пусть также $\mathfrak{n}_p$ и ${}^{*}\mathfrak{n}_p$ — соответствующие базисы в B_{n-m} и ${}^{*}B_{n-m}$. Тогда имеем:

$$\overset{*}{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}_p + T_p^{a} \mathfrak{x}_a + U_p \mathfrak{x}, \quad {}^{*}\gamma_a = \gamma_a + V_a. \tag{3}$$

Связующие аффиноры T_p^{a}, U_p, V_a однозначно определяют переход от одного дооснащения m-поверхности к другому дооснащению. При преобразовании (3) преобразуются также все фундаментальные объекты дооснащенной m-поверхности, кроме связующего аффинора h_{ab}^{p}; последний не меняется при преобразовании (3). Можно показать, что всякому инвариантному дооснащению m-поверхности S соответствуют на этой m-поверхности при произвольном ее дооснащении связующие аффиноры P_p^{a}, Q_p, S_a, которые преобразуются при преобразовании (3) по закону:

$${}^{*}S_a = S_a - V_a, \quad {}^{*}P_q^{a} = P_p^{a} - T_p^{a}, \quad {}^{*}Q_p = Q_p - P_p^{e} V_e + T_p^{e} V_e = U_p. \tag{4}$$

Обратно, каждые три связующие аффинора P_p^{a}, Q_p, S_a, определенные на произвольно дооснащенной m-поверхности S и преобразующиеся по закону (4) в силу преобразования (3), определяют инвариантное дооснащение m-поверхности S, именно то, для которого $P^a_p = 0$, $Q_p = 0$, $S_a = 0$.

Для построения величин P^a_p, Q_p, S_a рассмотрим множество всех относительных инвариантов связующего аффинора h^p_{ab} и предположим существование хотя бы одного отличного от нуля такого инварианта I, имеющего вес k_1 относительно касательного E_m, вес k_2 относительно оснащающего E_{n-m} и вес k относительно радиального E_1, причем $k_1 k_2 \neq 0$. Нетрудно убедиться, что указанные веса связаны соотношениями; $k_1 m = -2k$, $k_2(n-m) = k$; отсюда, возводя инвариант I в подходящую степень, можно всегда добиться, чтобы $k_1 = 2(n-m)$ и $k_2 = -m$, поэтому мы сразу предположим, что инвариант I имеет такие веса. С помощью этого инварианта строим связующий аффинор $h^{ab}_{\ \ p} = \frac{\partial \ln I}{\partial h_{ab}^{\ \ p}}$. Далее, предположим, что из фундаментальных объектов и их дифференциальных продолжений ([1]) построен относительный инвариант $\mathfrak{A}$ отличный от нуля веса v_1, v_2, v относительно касательного E_m, оснащающего E_{n-m} и радиального E_1, соответственно, причем $(2n-m)[(m+1)v_1 + v] - (m+2)(n-m)(v_1 - v_2) \neq 0$ и при преобразовании (3) инвариант $\mathfrak{A}$ не преобразуется. Разделив этот инвариант $\mathfrak{A}$ на подходящую степень инварианта I, мы всегда можем достигнуть, чтобы для вновь полученного инварианта его веса относительно касательного E_m и оснащающего E_{n-m} были равны. Поэтому можно считать, что для инварианта $\mathfrak{A}$ имеет место: $v_1 = v_2$ и $(m+1)v_1 + v \neq 0$.

Теперь, используя законы преобразований фундаментальных объектов дооснащенной m-поверхности при преобразовании (3), можно показать, что условия:

$$\begin{aligned} S_a &\equiv \frac{1}{\mathfrak{A}\{(m+1)v_1 + v\}} D_a \mathfrak{A} = 0, \\ Q_p &\equiv \frac{1}{m} h^{ab}_{\ \ p}(g_{ab} + D_a S_b - S_a S_b) + P^e_p S_e = 0, \\ P^a_p &\equiv \frac{1}{n}\left(D_e h^{ea}_{\ \ p} - \frac{1}{2n-m} h^{ab}_{\ \ p} h^q_{bc} D_e h^{ec}_{\ \ q}\right) + \frac{m+2}{2n-m} h^{ab}_{\ \ p} S_b = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

определяют инвариантное дооснащение m-поверхности в P_n, т. е. этими условиями определяются инвариантный объект линейной аффинной связности в радиальном составном многообразии и инвариантное оснащающее подпространство B_{n-m}. Очевидно, условия (5) можно заменить эквивалентными условиями $D_a \mathfrak{A} = 0$, $D_e h^{ea}_{\ \ p} = 0$, $h^{ab}_{\ \ p} g_{ab} = 0$.

Следует заметить, что при $m^2 + 3m > 2n$ равны нулю все относительные инварианты связующего аффинора h^p_{ab} и указанный путь построения инвариантной теории m-поверхности в P_n невозможен. Поэтому при $m^2 + 3m > 2n$ следует рассматривать соприкасающиеся подпространства более высокого порядка.

Поступило
17 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Вагнер, Приложение к книге Веблена и Уайтхеда, Основания дифференциальной геометрии, М., 1949. [2] J. A. Schouten, V. Hlavatý, Math. Z., 30, 414 (1929). [3] В. В. Вагнер, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 8, 11 (1950). [4] А. П. Норден, Матем. сборн., 20 (62) : 2, 264 (1947).