Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 2

МАТЕМАТИКА

Б. М. ЛЕВИТАН

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 3 III 1953)

1. Обозначим через D некоторую конечную область m-мерного пространства Евклида и через B — границу области D. Через $\overline{D}$ мы будем обозначать замыкание области D, т. е. $\overline{D}=D+B$. Рассмотрим задачу на собственные значения:

$$\Delta u+\mu^2 u=0,\qquad u\,|_B=0. \tag{1}$$

Обозначим через $\mu_1^2, \mu_2^2, \ldots, \mu_n^2, \ldots$ собственные значения задачи (1) и через $\omega_1(P), \omega_2(P), \ldots, \omega_n(P), \ldots$ — соответствующие собственные функции (P — точка D).

Будем называть спектральной функцией оператора Лапласа функцию

$$\theta(P,\ Q;\ \mu)=\sum_{\mu_n<\mu}\omega_n(P)\,\omega_n(Q).$$

Обозначим через ε произвольное положительное число и через D_ε — множество точек области D, расстояние которых до границы B области D не меньше, чем ε.

Далее положим ($s\geqslant 0$)

$$\theta_s(P,\ Q;\ \mu)=\frac{1}{\Gamma(s+1)}\sum_{\mu_n<\mu}\left(1-\frac{\mu_n^2}{\mu^2}\right)^s\omega_n(P)\,\omega_n(Q),$$

$$\theta_s^*(P,\ Q;\ \mu)=\frac{2^s}{(2\pi)^{m/2}}\frac{\mu^{m/2-s}}{r^{m/2+s}}J_{m/2+s}(\mu r), \tag{2}$$

где через r обозначено расстояние между точками P и Q, а $J_p(x)$ — функция Бесселя порядка p.

Имеют место следующие результаты:

Теорема 1. *Существует константа $C=C_\varepsilon$ так, что если $P,\ Q\in D_\varepsilon$, то*

$$\sum_{a<\mu_n\leqslant a+1}|\,\omega_n(P)\,\omega_n(Q)|<C\,|\,a\,|^{m-1}.$$

Теорема 2. *Пусть $P,\ Q\in D_\varepsilon$. Обозначим через l целую часть числа s. При $\mu\to\infty$ справедливы следующие асимптотические формулы:*

1) *Если* $l \leqslant m-1$, *то*

$$\theta_s(P, Q; \mu) = \theta_s^*(P, Q; \mu) + O(\mu^{m-1-s}). \quad (3)$$

2) *Если* $m-1 < l \leqslant m$, *то*

$$\theta_s(P, Q; \mu) = \theta_s^*(P, Q; \mu) + O\left(\frac{1}{\mu^{s-l}}\right). \quad (4)$$

3) *Если* $l > m$, *то*

$$\theta_s(P, Q; \mu) = \theta_s^*(P, Q; \mu) + O\left(\frac{1}{\mu}\right). \quad (5)$$

В асимптотических равенствах (3), (4) и (5) при фиксированном ε оценка O-членов равномерна.

В частности, при $s=0$ формула (3) принимает вид:

$$\sum_{\mu_n<\mu} \omega_n(P)\,\omega_n(Q) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \frac{\mu^{m/2}}{r^{m/2}} J_{m/2}(\mu r) + O(\mu^{m-1}). \quad (6)$$

Асимптотическая формула (6) существенно уточняет один результат Карлемана [1].

2. Пусть $f(Q) \in L_2(\overline{D})$, $P \in D_\varepsilon$, $s \geqslant 0$. Положим

$$c_n = \int\limits_{\overline{D}} f(Q)\,\omega_n(Q)\,dv_Q,$$

$$R_s(P, \mu) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \sum_{\mu_n<\mu} \left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mu^2}\right)^s c_n \omega_n(P),$$

$$R_s^*(P, \mu) = \int\limits_0^\mu \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^s d_\nu R^*(P, \nu),$$

где

$$R^*(P, \nu) = \int\limits_{\overline{D}} f(Q)\,\theta_0^*(P, Q; \nu)\,dv_a,$$

а $\theta_0^*(P, Q; \nu)$ определяется по формуле (2).

$R_s(P, \mu)$ есть среднее по Риссу порядка s разложения по собственным функциям оператора Лапласа, а $R_s^*(P, \mu)$ есть среднее по Риссу разложения в обычный m-кратный интеграл Фурье функции, равной $f(Q)$ для $Q \in \overline{D}$ и равной 0 для других Q.

Имеют место следующие результаты:

Теорема 3. *Пусть* $s = \frac{m-1}{2}$ *и* ε *фиксировано.*

Тогда равномерно для $P \in D_\varepsilon$

$$\lim_{\mu\to\infty} \{R_s(P, \mu) - R_s^*(P, \mu)\} = 0,$$

т. е. разность между средним по Риссу порядка $\frac{m-1}{2}$ *для разложения по собственным функциям оператора Лапласа и средним по Риссу того же порядка для разложения в обычный интеграл Фурье стремится к нулю равномерно в каждой области, содержащейся целиком внутри области* D.

Замечание. Условия суммируемости по Риссу порядка $\frac{m-1}{2}$ разложения в обычный интеграл Фурье даются в работе ([2]).

Теорема 4. *Пусть* $r=\frac{m-1}{2}$, $s>r$, $s=l+\alpha$, $l\geqslant 0$ — *целое,* $0\leqslant\alpha<1$.

Существует константа $C=C_\varepsilon$ *так, что если* $P\in D_\varepsilon$, *то при* $\mu\to\infty$ *имеют место следующие оценки*:

1) *Если* $l\geqslant r+1$, *то*

$$|R_s(P,\mu)-R_s^*(P,\mu)|<\frac{C_\varepsilon}{\mu}. \tag{7}$$

2) *Если* $l\leqslant r$, *то*

$$|R_s(P,\mu)-R_s^*(P,\mu)|<\frac{C_\varepsilon}{\mu^{s-r}}. \tag{8}$$

3) *Если* $r<l\leqslant r+1$, *то*

$$|R_s(P,\mu)-R_s^*(P,\mu)|\leqslant\frac{C_\varepsilon}{\mu^{\alpha}}. \tag{9}$$

В частности, из оценок (7), (8) и (9), а также из одного результата Бохнера ([2]) следует, что если $f(Q)\in L_2(\overline{D})$, *то разложение по собственным функциям оператора Лапласа суммируется с помощью средних Рисса порядка* $>\frac{m-1}{2}$ *к значению функции в каждой внутренней точке области* D, *в которой функция* $f(Q)$ *непрерывна.*

Теоремы 1, 2, 3 и 4 справедливы также в том случае, если D есть бесконечная область, лежащая вне некоторой конечной замкнутой поверхности B. В этом случае D_ε есть множество точек области D, расстояние которых до границы B области D не меньше чем ε.

Поступило
23 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Carleman, Comptes Rendus des Math. Scandinaves, à Stockholm, 14—18 Août, p. 34 (1934). [2] S. Bochner, Trans. Am. Math. Soc., **40**, 175 (1936).