**Доклады Академии Наук СССР**
**1953. Том XC, № 2**

*МАТЕМАТИКА*

В. И. КОНДРАШОВ

# К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

*(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 III 1953)*

Введем условные обозначения: $D$ — область $n$-мерного пространства $x_1, \ldots, x_n$ с границей $S = \sum_{s=1}^{n} S_{n-s}$ ($S_{n-s}$ — многообразие измерения $n-s$); $W_p^m$ — пространство функций, у которых производные порядка $m$ суммируемы в $D$ со степенями $p$ ([1], [2])*; $W_p^m(0)$ — подпространство $W_p^m$, состоящее из функций вместе со своими производными до порядка $\left(m - \left[\frac{s}{p}\right] - 1\right)$ включительно, принимающих в среднем (с некоторыми показателями**) нулевые значения на граничных области $D$ многообразиях $S_{n-s}$. $F_m^p(u)$ есть форма вида

$$F_m^p(u) = \sum A_{l_r, q}(x_1, \ldots, x_n) \left| u_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}^{l_1} \right|^{q_1} \ldots \left| u_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}^{l_r} \right|^{q_r} \ldots \left( u_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}^{l_H} \right)^{q_H} *** \quad (1)$$

$$\sum \alpha = l_r; \quad \max l_r \leqslant m; \quad \sum q_r \leqslant p.$$

Форму $F_m^p(u)$ назовем допустимой в $W_p^m$, если интеграл от этой формы при любой функции из $W_p^m$ имеет смысл. Допустимость формы определяется качеством ее коэффициентов, т. е. некоторыми соотношениями между величинами $\max l_r, m, q_r, n, p$.

Например: 1) $\max\ l_r \leqslant m - \frac{n}{p}$. $(A_{l_r, q_r, \alpha})^\nu$ суммируемы в $D$, $\nu = 1, \nu > 1$. 2) $\max\ l_r > m - \frac{n}{p}$. Пусть $p^* \leqslant \frac{pn}{n - p(m - \max l_r)}$, тогда: а) $p < p^*$, $(A)^\nu$ суммируемы в $D$, $\nu = p^* : (p^* - p)$; б) $p \geqslant p^*$, $A$ ограничены и суммируемы в $D$.

$\Phi_m^p(u)$, где $p \geqslant 2$, $m \geqslant 1$, допустимая форма в $W_p^m$ со свойствами:

$$\Phi_m^p(u) = \sum_{\Sigma\alpha = m} A_{m,p}(x_1, \ldots, x_n) \left| u_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}^m \right|^p + \overline{F}_m^p(u) = \overline{\Phi}_m^p(u) + \overline{F}_m^p(u)$$

* Норму в $W_p^m$ примем согласно ([2]), где $W_p^m = L_p^m$.

** Показатели $q^* \leqslant \frac{p(n-s)}{n - p(m-l)}$ (см. ([3]), где $W_p^m = L_p^m$, или ([1])).

*** $u_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}^l$ — производная от функции $u$ порядка $l$, взятая по переменным $x_1$ ($\alpha_1$ раз), $x_2$ ($\alpha_2$ раз) и т. д.

($\overline{F}_m^p = F_m^p$, где все $A_{m,q_r,\alpha} \equiv 0$); при этом $A_{m,p} \geqslant a > 0$; $\Phi_m^p(u) \geqslant b\overline{\Phi}_m^p(u)$; $a$, $b$ — постоянные. $F_{m-\lambda}^q(u)$ также допустимая в $W_p^m$ форма, но с такими данными: а) $1 \leqslant \lambda \leqslant m$, $1 < q < \frac{np}{n-p\lambda}$; если $p\lambda \geqslant n$, то $q$ может иметь какое угодно значение; б) коэффициенты при каждом члене формы неотрицательны и по крайней мере один из них (в области $D$) отличен от нуля на множестве положительной меры.

Основная задача. В $W_p^m(0)$ найти функцию $\varphi = u_1$, реализующую минимум функционала

$$\overbrace{\int \cdots \int_D}^{n} \Phi_m^p(x_1, \ldots, x_n, \varphi, \ldots, \varphi^m_{\alpha_1 \ldots \alpha_n})\, dv, \quad dv = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n, \tag{2}$$

при условии, что

$$\overbrace{\int \cdots \int_D}^{n} F_{m-\lambda}^q(x_1, \ldots, x_n, \varphi, \ldots, \varphi^{m-\lambda}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n})\, dv = 1. \tag{3}$$

При этом формы $\Phi_m^p(\;)$ и $F_{m-\lambda}^q(\;)$ — допустимые в $W_p^m$. В дальнейшем форму $\Phi_m^p$ будем называть формой ядра. Форму $F_{m-\lambda}^q$, при помощи которой образуется интеграл связи (3), назовем формой связи.

Основное предложение 1. *При любых допустимых форме ядра $\Phi_m^p$ и форме связи $F_{m-\lambda}^q$ существует бесконечная последовательность решений $u_k$ следующих рекурентных вариационных задач: в $W_p^m(0)$ найти функцию $\varphi = u_k$, реализующую решение задачи о минимуме интеграла* (2) *при дополнительных условиях*

$$\overbrace{\int \cdots \int_D}^{n} F_{m-\lambda}^q(\varphi)\, dv = 1; \quad \overbrace{\int \cdots \int_D}^{n} F_{m-\lambda}^{q-1,1}(u_j, \varphi)\, dv = 0, \quad j = 1, \ldots, k-1. \tag{4}$$

*Функции $u_k$ при этом удовлетворяют вариационному уравнению*

$$\overbrace{\int \cdots \int_D}^{n} \Phi_m^{p-1,1}(u_k, \xi_k)\, dv - \mu_k \overbrace{\int \cdots \int_D}^{n} F_{m-\lambda}^{q-1,1}(u_k, \xi_k)\, dv = 0, \tag{5}$$

*где*

$$\frac{q}{p} \overbrace{\int \cdots \int_D}^{n} \Phi_m^p(u_k)\, dv = \mu_k; \quad \overbrace{\int \cdots \int_D}^{n} F_{m-\lambda}^{q-1,1}(u_j, \xi_k)\, dv = 0, \quad j = 1, \ldots, k-1, \tag{6}$$

*$\xi_1$ пробегает все множество функций $W_p^m(0)$. В случае квадратичных форм ядра и связи $\xi_k$ пробегает все множество $W_p^m(0)$.*

Предложение 2. *Собственные значения вариационного уравнения* (5) *образуют возрастающую последовательность $\mu_1 < \mu_2 < \ldots$ В любом ограниченном числовом интервале содержится лишь конечное число собственных значений. $\mu_k \to \infty$, когда $k \to \infty$.*

Предложение 3. *Собственные функции уравнения* (5) *образуют систему функций, «ортогональных» и «нормированных» в следующем смысле:*

$$\frac{1}{q} \overbrace{\int \cdots \int_D}^{n} F_{m-\lambda}^{q-1,1}(u_j, u_i)\, dv = \begin{cases} 0; \\ 1; \end{cases} \frac{q}{p} \overbrace{\int \cdots \int_D}^{n} \Phi_m^{p-1,1}(u_j, u_i)\, dv = \begin{cases} 0; & j \gtrless i, \\ \mu_j; & j = i. \end{cases} \tag{7}$$

Предложение 4. *Возьмем* $\varphi \subset W_p^m(0)$. *Рассмотрим вместе с* $\varphi$ *систему собственных функций уравнения* (5) ($u_1$, $u_2$ *и т. д.*). *Образуем последовательность чисел*

$$a_k = \frac{1}{q} \overbrace{\int \cdots \int_D}^{n} F_{m-\lambda}^{q-1,1}(u_k, \varphi)\, dv$$

(*коэффициенты функции* $\varphi$ *по системе* (7)). *Тогда, если* $a_k = 0$ *при любых* $k$, *то* $\varphi = 0$ *почти везде в* $D$; $a_k \to 0$, *когда* $k \to \infty$.

Остановимся подробнее на случае квадратичной формы ядра. Подчиним формы ядра и связи некоторым дополнительным условиям, например: 1) коэффициенты формы ядра $\Phi_m^2$ $m$ раз непрерывно дифференцируемы в $D$; 2) оператор $L^m(u) = \sum\limits_{\Sigma\alpha = m} \left(A_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\, u^m_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\right)^m_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ самосопряженный эллиптический, допускающий фундаментальное решение; 3) коэффициенты формы связи $F^q_{m-\lambda}$ имеют в $D$ кусочно непрерывные производные до порядка $\max(l_1, \ldots, l_r, \ldots, l_H) + 1$. При этом следует различать два случая: 1) числа $q_1, \ldots, q_H$ (в любом из членов формы $F^q_{m-\lambda}$) — целые числа или такие, что $\min(q_1, \ldots, q_H) > \max(l_1, \ldots, l_H) + 1$; 2) среди не целых чисел $q_1, \ldots, q_H$ найдутся такие (хотя бы в одном из членов формы $F^q_{m-\lambda}$), что $\min(q_1, \ldots, q_H) \leqslant \max(l_1, \ldots, l_H) + 1$.

Предложение 4′. *Рассмотрим основную вариационную задачу с формой ядра* $\Phi_m^2$ *и формой связи* $F^q_{m-\lambda}$, *подчиненных условиям* 1), 2) *и* 3). *Тогда решениям задач предложения* 1, *а следовательно, и решениям уравнения* (5) *соответствует биортогональная система* *

$$\{u_k, L(u_k)\}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{7'}$$

Предложение 5**. *Решение первой вариационной задачи есть также и решение (собственная функция) следующих дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений*:

$$L^m(u) + (-1)^{m+1} \mu_1 F(x, \ldots, x_n, u, \ldots, u^{2m-\lambda}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}) = 0 \tag{8¹}$$

($F$ — *нелинейная часть уравнения* (8¹));

$$u(M) = \mu_1 \overbrace{\int \cdots \int_D}^{n} K(M, P)\, F(P, u, \ldots, u^{2m-\lambda}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n})\, dP. \tag{8²}$$

$K(M, P)$ — *функция Грина для оператора* $L^m(\quad)$, *функции* $u_2, u_3, \ldots$ *могут удовлетворять, вообще говоря, и более сложным уравнениям.*

Предложение 6 (условия полноты). *Пусть* $\varphi \subset W_p^m(0)$;

$$a_k = \frac{1}{q} \overbrace{\int \cdots \int_D}^{n} (-1)\, L^m(u_k)\, \varphi\, dv;$$

$$\bar{a}_k = \frac{1}{q} \overbrace{\int \cdots \int_D}^{n} F_{m-\lambda}^{q-1,1}(\varphi, u_k)\, dv; \quad \psi_k = \varphi - \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i\, u_i}{\mu_i} \text{***}.$$

---

* См. также условия «ортогональности» (7).

** При втором случае формы связи (3) это предложение формулируется иначе.

*** Коэффициенты $a_k$, так же как и сопряженные коэффициенты $\bar{a}_k$, определяют функцию $\varphi$ единственным образом. В случае же квадратичной формы связи имеем

$$a_k = \bar{a}_k = \frac{1}{2} \overbrace{\int \cdots \int_D}^{n} F^{1,1}_{m-\lambda}(u_k, \varphi)\, dv.$$

*Имеют место следующие условия полноты:*

$$\overbrace{\int\cdots\int_D}^{n} F^q_{m-\lambda}(\psi_k)\,dv\to 0;\quad \overbrace{\int\cdots\int_D}^{n}\Phi^2_m(\psi_k)\,dv\to 0,\quad k\to\infty, \tag{9}$$

*или эквивалентные последним*

$$\overbrace{\int\cdots\int_D}^{n} F^q_{m-\lambda}(\varphi)\,dv=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i\,\bar a_i}{\mu_i};\quad \overbrace{\int\cdots\int_D}^{n}\Phi^2_m(\varphi)\,dv=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i^2}{\mu_i}. \tag{10}$$

*Последовательность* $\psi_k\to 0$ *в* $W_p^m$ *и во всех* $W_{q^*}^{m-\lambda}\subset W_p^m$.

Решения уравнений (8) и (9) связаны с биортогональной системой (7′).

Предложение 7. *Возьмем* $\varphi\subset W_2^m(0)$ *и такую, что*

$$a_k=\lambda\bar a_k, \tag{11}$$

*где* $\lambda$ — *некоторая постоянная;* $\overbrace{\int\cdots\int_D}^{n} F^q_{m-\lambda}(\varphi)\,dv=1$. *Тогда: функция* $\varphi$ *есть решение уравнений* (8) (*собственная функция*); *постоянная* $\lambda$ *является собственным значением уравнений* (8). *При этом*

$$\lambda=\overbrace{\int\cdots\int_D}^{n}\Phi^2_m(\varphi)\,dv.$$

*Обратно, всякое решение уравнений* $(8)\subset W_p^m(0)$, *удовлетворяет условиям* (11). *Приведенная теория распространяется и на более широкие классы вариационных задач, а следовательно, и более общего вида, чем* (8), *дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения.*

Линейные задачи. Вариационным задачам с квадратичными формами ядра $\Phi_m^2$ и связи $F^2_{m-\lambda}$ соответствуют линейные случаи уравнений (8) и (5), при этом имеют место следующие результаты:

1. Уравнения (5) и (8) имеют счетно дискретный спектр и соответствующую последнему полную, в некотором смысле (см. (9), (10) при $q=2$), систему собственных функций, «нормированных» и «ортогональных» сообразно форме связи (см. (7) при $p=q=2$).

2. Полнота системы собственных функций есть следствие минимальных свойств собственных значений. Система решений уравнений (5), (8), обладающая свойствами обобщенной полноты, совпадает с системой функций соответствующих вариационных задач 1.

Результаты работы получены на основе исследований С. Л. Соболева и автора о пространствах $W_p^m$ ([1-4]). Доказательство основного предложения проведено прямым вариационным методом с использованием свойств функций $W_p^m$ и специально установленных неравенств. Непрерывность и дифференцируемость решений вариационных уравнений (5) изучались методом, обобщающим метод работы ([5]).

Московский
механический институт

Поступило
12 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа к математической физике, 1950. [2] В. И. Кондрашов, ДАН, 48, № 8 (1945). [3] В. И. Кондрашов, ДАН, 52, № 6 (1950). [4] В. И. Кондрашов, ДАН, 31, № 6 (1946). [5] С. Л. Соболев, Матем. сборн., 2 (44): 3, 465 (1937). [6] Л. А. Люстерник, там же, 4 (46) (1938). [7] В. В. Немыцкий, Усп. матем. наук, в. 1, 141 (1936).