Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 2

МАТЕМАТИКА

Н. И. КОВАНЦОВ

ТРИОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА ЛИНИЙ КОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 14 III 1953)

В метрической теории комплекса весьма плодотворным является понятие центра луча комплекса ([1,2]). Так называется точка, в которой касательная плоскость конуса комплекса (ассоциированного с этой точкой), касающаяся конуса вдоль данного луча, перпендикулярна к касательной плоскости цилиндра комплекса, соответствующего этому лучу. Нормаль к касательной плоскости конуса носит название главной нормали, нормаль к касательной плоскости цилиндра — бинормали комплекса. С каждым лучом, таким образом, естественно связывается некоторый подвижной трехгранник. Если $\mathbf{A}$ — вершина этого трехгранника (центр луча), $\mathbf{I}_3$ — единичный вектор луча, $\mathbf{I}_1$ — единичный вектор главной нормали, $\mathbf{I}_2$ — единичный вектор бинормали комплекса, то бесконечно малые преобразования подвижного трехгранника будут определяться уравнениями:

$$d\mathbf{A} = \omega_i \mathbf{I}_i, \quad d\mathbf{I}_i = \omega_{ik}\mathbf{I}_k \quad (\omega_{ik} = -\omega_{ki};\ i,\ k = 1,\ 2,\ 3). \tag{1}$$

При этом

$$\omega_2 = a\omega_{31} \tag{2}$$

([1], стр. 416—418).

Дифференцируя (2) внешним образом и используя для получаемого при этом тождества лемму Картана, получим:

$$\begin{gathered} \omega_{12} = x_1\omega_1 + x_2\omega_{31} + x_3\omega_{32}, \\ da = x_2\omega_1 + x_4\omega_{31} + x_5\omega_{32}, \\ \omega_3 = (ax_1 - x_3)\,\omega_1 + (ax_2 - x_5)\,\omega_{31} + (ax_3 - x_6)\,\omega_{32}. \end{gathered} \tag{3}$$

Луч комплекса будет касаться некоторой пространственной кривой, если $d\mathbf{A} = \omega_3\mathbf{I}_3$, т. е.

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0. \tag{4}$$

Интегральными многообразиями наибольшего числа измерений системы (4) являются кривые. Все эти кривые составляют, очевидно, вообще говоря, двухпараметрическое семейство кривых. Исключение представляют лишь некоторые вырождения системы (4). Например, для специального комплекса $a = 0$ уравнение $\omega_2 = 0$ обращается в тождество. Мы будем иметь лишь одно уравнение $\omega_1 = 0$, интегральным многообразием которого является некоторая поверхность. Такой комплекс представляет собой совокупность касательных к некоторой поверхности. Исключая этот и подобные ему вырожденные случаи, будем иметь теорему:

Произвольный комплекс представляет собой совокупность касательных к некоторому двухпараметрическому семейству кривых. Следуя Гааку, будем называть эти кривые центральными кривыми.

Комплекс, описываемый вектором $\mathbf{I}_3$, назовем комплексом B_3. В свою очередь векторы $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$ также описывают некоторые комплексы, которые мы обозначим, соответственно, буквами B_1 и B_2. Комплекс B_1 является сопряженным комплексу B_3 и содержит центр луча в точке $\mathbf{A}$ ([2]). Центральные кривые этого комплекса образуют второе двухпараметрическое семейство, которое, очевидно, определится уравнениями системы

$$\omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0. \tag{5}$$

Точка $\mathbf{A}$, вообще говоря, не является центром луча комплекса B_2. Следовательно, кривые, которые огибаются бинормалью $\mathbf{I}_2$ (с точкой прикосновения $\mathbf{A}$), не являются центральными кривыми комплекса B_2. Эти кривые определяются системой пфаффовых уравнений:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_3 = 0. \tag{6}$$

Совокупность кривых (4), (5), (6) образует, очевидно, триортогональную систему линий. Таким образом:

Произвольный комплекс (исключая вырождения) определяет в пространстве некоторую триортогональную систему линий.

Для центральных кривых комплекса B_3 имеем $d\mathbf{A} = \omega_3\mathbf{I}_3$. Следовательно, $\omega_3 = ds$ (дифференциал длины дуги), $\mathbf{I}_3$ — единичный вектор касательной. Вдоль центральной кривой $d\mathbf{I}_3 = \omega_{32}\mathbf{I}_2$. Следовательно, $\mathbf{I}_2$ (бинормаль комплекса B_3) является нормалью центральной кривой. Единичный вектор $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2 \times \mathbf{I}_3 = -\mathbf{I}_3 \times \mathbf{I}_2$ главной нормали комплекса противоположен единичному вектору бинормали центральной кривой. Мы имеем $-d\mathbf{I}_1 = \omega_{12}\mathbf{I}_2$. Следовательно, кривизна и кручение центральных кривых комплекса B_3 определяются формулами:

$$k_3 = \frac{\omega_{32}}{\omega_3} = \frac{1}{ax_3 - x_6}, \quad \chi_3 = -\frac{\omega_{12}}{\omega_3} = -\frac{x_3}{ax_3 - x_6}.$$

У комплекса $x_3 = 0$ все центральные кривые являются плоскими. Подставляя значение $x_3 = 0$ в уравнения (3), заключим, что решение получаемой при этом системы уравнений Пфаффа существует с произволом двух функций двух аргументов.

Главной нормалью центральных кривых комплекса B_1 является также бинормаль $\mathbf{I}_2$ комплекса B_3 (которая является бинормалью и комплекса B_1). Кривизна и кручение этих кривых определяются формулами:

$$k_1 = \frac{\omega_{12}}{\omega_1} = \frac{x_3^2 - x_1x_6}{ax_3 - x_6}, \quad \chi_1 = \frac{\omega_{32}}{\omega_1} = -\frac{ax_1 - x_3}{ax_3 - x_6}.$$

Для комплекса $ax_1 - x_3 = 0$ все центральные кривые сопряженного ему комплекса B_1 являются плоскими. Класс таких комплексов существует с произволом двух функций двух аргументов.

Кривизна кривой, описываемой лучами комплекса B_2 (не центральной, будем называть ее бинормальной кривой), определяется формулой

$$k_2 = \frac{1}{a}\sqrt{\left(\frac{x_3x_5 - x_2x_6}{ax_3 - x_6}\right)^2 + \left(\frac{ax_2 - x_5}{ax_3 - x_6}\right)^2}.$$

Каждая из кривых рассматриваемого триортогонального семейства вырождается в точку для комплекса

$$ax_3 - x_6 = 0. \tag{7}$$

Совокупность центральных точек такого комплекса вырождается в поверхность, определяемую дифференциальным уравнением:

$$dA = [I_1 + (ax_1 - x_3) I_3] \omega_1 + a [I_2 + (ax_2 - x_5) I_3] \omega_{31}.$$

Такой комплекс аналогичен специальному комплексу, у которого совокупность центров также вырождается в поверхность. Следовательно, каждая точка такой поверхности является центром всех прямых комплекса, через нее проходящих, т. е. конуса комплекса. У специального комплекса этот конус, кроме того, вырождается в плоскость, касательную к поверхности центров. У комплекса (7) конус является, вообще говоря, невырождающимся. Широта класса комплексов (7) — две функции двух аргументов.

Центральные кривые комплексов B_3 и B_1 расслаиваются в однопараметрическое семейство поверхностей, если имеет место равенство $\omega_2 = 0$. Дифференцируя это уравнение внешним образом, обнаружим, что такое расслоение возможно лишь для комплексов

$$x_1 = 0. \tag{8}$$

У таких комплексов, как известно, каждый цилиндр вырождается в плоскость [2]. Так как главные нормали центральных кривых комплексов B_3 и B_1 совпадают с нормалью к поверхности $\omega_2 = 0$, то эти кривые являются геодезическими линиями поверхности. Рассматриваемый класс комплексов зависит от двух функций двух аргументов.

Если центральные кривые комплекса B_3 и бинормальные кривые расслаиваются в однопараметрическое семейство поверхностей, то дифференциальное уравнение этих поверхностей будет иметь вид $\omega_1 = 0$. Дифференцируя это уравнение внешним образом, получим

$$2ax_3 - x_6 = 0. \tag{9}$$

Можно показать, что такой комплекс в каждом своем луче содержит параболическую конгруенцию, фокус которой совпадает с центром луча. Центральные кривые комплекса B_3 являются, очевидно, асимптотическими линиями поверхности $\omega_1 = 0$. Широта решения — две функции двух аргументов.

Если центральные кривые комплекса B_1 и бинормальные кривые расслаиваются в однопараметрическое семейство поверхностей, то имеет место равенство $\omega_3 = 0$. Дифференцирование внешним образом этого равенства показывает, что такое расслоение возможно лишь для комплексов

$$a^2 x_1 - x_6 = 0. \tag{10}$$

Центральные кривые комплекса B_1 являются также асимптотическими линиями поверхности $\omega_3 = 0$. Решение соответствующей системы уравнений Пфаффа зависит от двух функций двух аргументов.

Триортогональная система линий комплекса расслаивается в триортогональную систему поверхностей, если равенства (8), (9), (10) имеют место одновременно. В этом случае имеют место соотношения

$$x_1 = 0, \quad x_6 = 0, \quad x_3 = 0. \tag{11}$$

Комплекс (11) представляет собой частный случай комплекса (7). Следовательно, все кривые триортогональной системы вырождаются в точки. Это означает, что не существует комплексов, триортогональные системы линий которых расслаиваются в триортогональную систему поверхностей.

Пусть

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}(t;\ u,\ v) \tag{12}$$

есть уравнение произвольного двухпараметрического семейства (параметры u и v) кривых. Пусть вектор $\mathbf{I}_3$ — единичный вектор касательной кривой (12), $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$ — произвольные единичные взаимно-перпендикулярные векторы нормалей этой кривой.

Пусть

$$\mathbf{A}_u=p\mathbf{I}_1+q\mathbf{I}_2+r\mathbf{I}_3,\quad A_v=\bar{p}\mathbf{I}_1+\bar{q}\mathbf{I}_2+\bar{r}\mathbf{I}_3,$$

$$\mathbf{I}_{3u}=p_3\mathbf{I}_1+q_3\mathbf{I}_2,\quad \mathbf{I}_{3v}=\bar{p}_3\mathbf{I}_1+\bar{q}_3\mathbf{I}_2,\quad \mathbf{I}_{3t}=p_3'\mathbf{I}_1+q_3'\mathbf{I}_2.$$

Необходимым и достаточным условием того, чтобы семейство (12) было семейством центральных кривых некоторого комплекса, является справедливость равенства

$$p_3'\begin{vmatrix} p_3 & q_3 & p \\ \bar{p}_3 & \bar{q}_3 & \bar{p} \\ p_3' & q_3' & 0 \end{vmatrix}+q_3'\begin{vmatrix} p_3 & q_3 & q \\ \bar{p}_3 & \bar{q}_3 & \bar{q} \\ p_3' & q_3' & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Произвол существования такого семейства — одна функция трех аргументов (произвол общего комплекса). В частности, если $\mathbf{I}_1$ — единичный вектор главной нормали кривой (12), то $q_3'=0$, и предыдущее равенство принимает вид

$$p_3\bar{q}-\bar{p}_3q=0. \tag{13}$$

В качестве примера можно привести семейство винтовых линий

$$x=u\cos t,\quad y=u\sin t,\quad z=f(u)\,t+v, \tag{14}$$

для которых выполняется равенство (13). Комплекс касательных к винтовым линиям (14) будет линейным, если $f(u)=cu^2$. В этом случае центральными кривыми комплекса B_1 будут также винтовые линии с той же осью, что и у линий (14), но с одним и тем же у всех шагом, равным $\frac{1}{c}$. Комплекс B_1 представляет в этом случае частный вид комплекса (9).

Поступило
3 III 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, М.— Л., 1948. [2] W. Haak, Math. Z., 40 (1935); 41 (1936).