**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 166, № 2
февраль, 2011**

 О. П. Соловцова[*†], Ю. Д. Черниченко[*]

РЕСУММИРУЮЩИЙ L-ФАКТОР В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОДХОДЕ

Получен новый релятивистский кулоноводобный ресуммирующий фактор (L-фактор) для произвольного орбитального момента $\ell \geqslant 0$. Рассмотрение проведено в рамках полностью ковариантного квазипотенциального подхода в квантовой теории поля, сформулированного в релятивистском конфигурационном представлении для случая взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс.

Ключевые слова: квантовая теория поля, релятивистское конфигурационное представление, кулоноводобный квазипотенциал.

1. ВВЕДЕНИЕ

Релятивистский квазипотенциальный (РКП) подход Логунова–Тавхелидзе [1] построен на основе ковариантной одновременной формулировки проблемы двух тел в квантовой теории поля (КТП). Развитию данного подхода было посвящено большое количество публикаций (см., например, работы [2]–[9]). РКП-подход сводит изучение релятивистской двухчастичной системы к исследованию ковариантных трехмерных двухчастичных уравнений для волновой функции шредингеровского вида или уравнений Липпмана–Швингера для инвариантной амплитуды рассеяния вне энергетической поверхности с обобщенным потенциалом – квазипотенциалом. Предложенный в этих и ряде других работ формализм, будучи трехмерным и допускающим вероятностную интерпретацию волновой функции, в то же время обладает и главными преимуществами (перенормируемость, аналитичность и т.д.) полностью ковариантного метода. Кроме того, в данном подходе все рассматриваемые величины имеют ясный физический смысл и аналогию с нерелятивистской квантовой

[*]Международный центр перспективных исследований, Гомельский государственный технический университет, Гомель, Беларусь.
E-mail: solovtsova@gstu.gomel.by, chern@gstu.gomel.by

[†]Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: olsol@theor.jinr.ru

механикой. Еще один вариант РКП-подхода к задаче о двух релятивистских частицах был предложен в работах [10], [11]. Данный подход не связан с формализмом Бете–Солпитера и ковариантным формализмом Феймана–Дайсона, а использует гамильтонову формулировку КТП [12]. При этом важно, что трехмерность в нее заложена с самого начала, а все частицы даже в промежуточных состояниях являются физическими, т.е. лежат на массовых поверхностях.

РКП-подход в КТП нашел широкое применение для описания свойств атомов, адронов и ядер как связанных состояний [13]–[16]. В настоящее время он продолжает оставаться одним из методов исследования составных объектов [17]–[19]. Точные решения релятивистских квазипотенциальных уравнений с квазипотенциалами конкретного вида (см., например, работы [20], [21]) представляют такой же интерес, как и соответствующие решения нерелятивистского уравнения Шредингера. Так, например, решение задачи о нерелятивистском потенциальном рассеянии двух бесспиновых частиц с произвольными массами m_1, m_2 на притягивающем кулоновском потенциале[1)]

$$V(r) = -\frac{\alpha Z_1 Z_2}{r} \tag{1.1}$$

позволяет вычислить для произвольного орбитального момента $\ell \geqslant 0$ кулоновский ресуммирующий фактор, определяющийся производной порядка ℓ от парциальной волновой функции непрерывного спектра в нуле [22], [23]:

$$\begin{aligned} L_{\rm nr}(\eta) &= \lim_{r\to 0}\left|\frac{\Gamma(2\ell+2)}{(2k)^\ell \Gamma^2(\ell+1)}\,\frac{d^\ell}{dr^\ell}\left[\frac{\varphi_\ell(r,k)}{r}\right]\right|^2 = \\ &= \frac{X_{\rm nr}(\eta)}{1-e^{-X_{\rm nr}(\eta)}}\prod_{n=1}^{\ell}\left[1+\left(\frac{\eta}{n}\right)^2\right], \qquad X_{\rm nr}(\eta) = 2\pi\eta. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь Γ – гамма-функция, $\eta = \lambda/k$ – кулоновский параметр Зоммерфельда, $\lambda = \mu\alpha Z_1 Z_2 > 0$; $k = 2\mu v_{\rm nr}$ – относительный импульс сталкивающихся частиц; $2v_{\rm nr}$ – относительная скорость этих частиц; $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ – обычная приведенная масса частиц; Z_1, Z_2 – их заряды; α – постоянная тонкой структуры.

Для часто встречающегося случая $\ell = 0$ и $Z_1 = Z_2 = 1$ выражение (1.2) принимает вид общеизвестного S-фактора Гамова–Зоммерфельда–Сахарова [24]–[26]

$$S_{\rm nr}(v_{\rm nr}) = \frac{X_{\rm nr}(v_{\rm nr})}{1-e^{-X_{\rm nr}(v_{\rm nr})}}, \qquad X_{\rm nr}(v_{\rm nr}) = \frac{\pi\alpha}{v_{\rm nr}}. \tag{1.3}$$

Хорошо известно, что кулоновский фактор (1.3) может оказывать существенное влияние на сечение неупругого процесса (см. книги [27], [28]). Действительно, S-фактор определяется квадратом модуля волновой функции относительного движения в кулоновском поле, вычисленной в начале координат и нормированной условием, что амплитуда асимптотической плоской волны равна единице. С другой стороны, квадрат модуля волновой функции в нуле определяет вероятность нахождения частиц вблизи друг друга, и, следовательно, сечение неупругого процесса оказывается пропорциональным S-фактору. При скоростях $v_{\rm nr}$ малых и таких, что

[1)] Мы будем всюду использовать систему единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

$\alpha \ll v_{\rm nr} \ll 1$, поведение S-фактора (1.3) определяется выражением $S_{\rm nr} \sim 1+\pi\alpha/v_{\rm nr}$, из которого следует, что при $v_{\rm nr} \to 0$ сечение процесса должно увеличиваться.

В квантовой хромодинамике (КХД) S-фактор важен вблизи порога рождения кварковой пары, поскольку в этой области пертурбативное разложение непригодно даже в том случае, когда константа связи $\alpha_{\rm S}$ мала [29], [30]. Причина состоит в том, что в околопороговой области пертурбативное разложение содержит сингулярности вида $(\alpha/v)^n$, где

$$v = \sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}, \tag{1.4}$$

$\sqrt{s}$ – полная энергия взаимодействующих частиц в системе центра инерции (СЦИ), а m – масса кварка. Такие пороговые сингулярности должны быть просуммированы. Впервые задача о кулоновском взаимодействии в конечном состоянии между компонентами электрон-позитронной пары была рассмотрена в рамках нековариантной теории возмущений на основе нерелятивистского уравнения Шредингера в известной работе Сахарова [26]. В рамках этого подхода такое рассмотрение приводит к нерелятивистскому S-фактору (1.3). Еще одно решение задачи о кулоновском взаимодействии в конечном (или начальном) состоянии для произвольного процесса с участием заряженных частиц с малыми относительными скоростями (т.е. нерелятивистских частиц, для которых $\alpha/v \gtrsim 1$) было получено в работе [31] путем суммирования главных (по α/v) диаграмм теории возмущений.

В релятивистской теории нерелятивистское приближение должно быть модифицировано. По-видимому, впервые релятивистская модификация S-фактора (1.3) в КХД для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс была выполнена в работах [32] (см. также [33]) и заключалась в замене $v_{\rm nr} \to v$. Точно такой же вид S-фактора, как в [32], и также при взаимодействии двух частиц равных масс был позднее предложен в работе [34]. Другое релятивистское обобщение S-фактора также в случае двух частиц равных масс было получено в работах [35].

Еще один метод получения релятивистского S-фактора для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс был предложен в работе [36]. Разработанный в этой работе метод базируется на РКП-подходе [10] и использует возможность перехода от интегрального уравнения в трехмерном импульсном пространстве Лобачевского к интегральному уравнению в трехмерном релятивистском конфигурационном представлении, введенном в статье [37] для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс. При этом важно, что использованный потенциал (1.1) учитывает существенные моменты КХД – свойство асимптотической свободы и закон эволюции инвариантного заряда [38]. Данный метод приводит к следующему релятивистскому S-фактору[2)]:

$$S(\chi) = \frac{X(\chi)}{1-e^{-X(\chi)}}, \qquad X(\chi) = \frac{\pi\alpha}{\operatorname{sh}\chi}, \tag{1.5}$$

где χ – быстрота, которая связана с полной энергией взаимодействующих частиц в СЦИ $\sqrt{s}$ соотношением $2m\operatorname{ch}\chi = \sqrt{s}$. Функция $X(\chi)$ в формуле (1.5) может быть

[2)]Здесь и далее всюду в кулоновском потенциале (1.1) считаем $Z_1 = Z_2 = 1$.

выражена в терминах скорости v:

$$X(v) = \frac{\pi\alpha}{v}\sqrt{1-v^2}.$$

Следует также обратить внимание на работу [39], в которой на основе уравнения Бете–Солпитера получено явное выражение для S-фактора при малых скоростях v. Полученное там выражение совпадает с фактором (1.5) при малых значениях скорости v (формула (1.4)), поскольку очевидно, что $X(v) \to \pi\alpha/v$ при $v \to 0$. Однако, как подчеркнуто в самой работе [39], авторам не удалось найти явное выражение для кулоновского фактора в ультрарелятивистском пределе при $v \to 1$.

Решение с произвольным i-периодическим фактором с кулоновским потенциалом было ранее получено в работе [40]. Известно, что использование данного решения применимо только для спектральных задач. Другие формы РКП-уравнения с таким потенциалом были рассмотрены в статьях [21], [41]. Применения релятивистского S-фактора (1.5) для описания ряда характеристик адронных процессов можно найти в работах [42]–[44].

Обобщение предложенного в работе [36] метода на случай состояний с произвольным значением ℓ и то же для случая взаимодействия двух частиц равных масс было проведено в работах [45], [46]. Данное рассмотрение приводит к следующему выражению для релятивистского ресуммирующего L-фактора ($\ell \geqslant 0$):

$$L(\chi) = \frac{X(\chi)}{1-e^{-X(\chi)}}\prod_{n=1}^{\ell}\left[1+\left(\frac{\alpha}{2n\,\mathrm{sh}\,\chi}\right)^2\right], \tag{1.6}$$

где функция $X(\chi)$ определена формулой (1.5).

Этот же метод был также успешно применен и в случае взаимодействия двух частиц произвольных масс m_1, m_2 в работе [47], что позволило получить следующее выражение для релятивистского ресуммирующего S-фактора (состояние $\ell = 0$) в РКП-подходе:

$$S_{\mathrm{RQP}}(u) = \frac{X_{\mathrm{RQP}}(u)}{1-e^{-X_{\mathrm{RQP}}(u)}}. \tag{1.7}$$

Здесь

$$X_{\mathrm{RQP}}(u) = \frac{\pi\alpha}{u}\sqrt{1-u^2}, \tag{1.8}$$

где скорость u дается выражением

$$u = \sqrt{1-\frac{4m'^2}{s-(m_1-m_2)^2}}, \tag{1.9}$$

а $m' = \sqrt{m_1 m_2}$ – масса эффективной релятивистской частицы, выступающей в качестве двухчастичной системы, концепция которой возникает в РКП-подходе [48].

Другое выражение для релятивистского S-фактора в случае двух частиц произвольных масс m_1, m_2 было предложено в рамках релятивистской квантовой механики на основе уравнения Шредингера в работе [49]. Сравнительный анализ обсуждаемых здесь выражений для S-фактора можно найти в работе [47].

Отметим, что ресуммирующие факторы появляются в параметризации мнимой части соответствующих кварковых токовых корреляторов, в отношении Дрелла

$R(s)$, которое в двухчастичном приближении может быть аппроксимировано амплитудой Бете–Солпитера двух заряженных частиц $\chi_{\rm BS}(x)$ при $x = 0$ [50]. Представление амплитуды Бете–Солпитера через волновую функцию, отвечающую нерелятивистскому уравнению Шредингера с кулоновским потенциалом, ведет к формуле (1.3) с заменой $\alpha \to 4\alpha_s/3$ для КХД. В РКП-подходе амплитуда Бете–Солпитера, которая параметризует физическую величину $R(s)$ и берется при $x = 0$, а следовательно, при относительном времени $\tau = 0$, может быть выражена для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс m через волновую РКП-функцию $\Psi_q(\mathbf{p})$ соотношением

$$\chi_{\rm BS}(x=0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\Omega_{\mathbf{p}}\,\Psi_q(\mathbf{p}), \tag{1.10}$$

где $d\Omega_{\mathbf{p}} = (m\,d\mathbf{p})/E_p$ – релятивистский трехмерный элемент объема в пространстве Лобачевского, которое реализуется на верхней полé массового гиперболоида $E_p^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$.

Цель настоящей работы состоит в обобщении метода, предложенного в работе [36], для вывода релятивистских ресуммирующих пороговых факторов для произвольного значения орбитального момента ($\ell \geqslant 0$) в рамках полностью ковариантного РКП-подхода в КТП. В разделе 2 представлен формализм РКП-подхода в КТП, сформулированного в релятивистском конфигурационном представлении для случая взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс [48]. В разделе 3 в рамках данного подхода изложена суть метода вывода новых S-, P-, D-факторов и как обобщение для произвольного орбитального момента ℓ – L-фактора. В разделе 4 выполнен анализ поведения полученных факторов в нерелятивистском, релятивистском и ультрарелятивистском случаях, в случае равных масс частиц и когда одна из частиц покоится и проведено сравнение этих факторов с их нерелятивистскими аналогами. Результаты анализа обсуждаются в заключении.

2. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ: СЛУЧАЙ ЧАСТИЦ ПРОИЗВОЛЬНЫХ МАСС

В основу нашего рассмотрения положено полностью ковариантное РКП-уравнение в пространстве моментов, построенное в работе [48] для волновой РКП-функции $\Psi_{q'}(\mathbf{p}')$ для случая взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс m_1, m_2. Это уравнение имеет вид

$$(2E_{q'} - 2E_{p'})\Psi_{q'}(\mathbf{p}') = \frac{2\mu}{m'(2\pi)^3}\int d\Omega_{\mathbf{k}'}\widetilde{V}(\mathbf{p}',\mathbf{k}';E_{q'})\Psi_{q'}(\mathbf{k}'), \tag{2.1}$$

где $d\Omega_{\mathbf{k}'} = m'\,d\mathbf{k}'/E_{k'}$ – релятивистский трехмерный элемент объема в пространстве Лобачевского, $m' = \sqrt{m_1\,m_2}$, $E_{q'} = \sqrt{m'^2 + \mathbf{q}'^2}$, $E_{p'} = \sqrt{m'^2 + \mathbf{p}'^2}$, $E_{k'} = \sqrt{m'^2 + \mathbf{k}'^2}$.

Уравнение (2.1) можно рассматривать как релятивистское обобщение уравнения Шредингера в духе геометрии Лобачевского, реализующейся на верхней полé массового гиперболоида $E_{p'}^2 - \mathbf{p}'^2 = m'^2$. Это уравнение описывает рассеяние на квазипотенциале $\widetilde{V}(\mathbf{p}',\mathbf{k}';E_{q'})$ эффективной релятивистской частицы, которая выступает в качестве двухчастичной системы, имеет массу m', относительный 3-импульс $\mathbf{k}'$ и несет полную энергию взаимодействующих частиц в СЦИ $\sqrt{s}$, пропорциональную энергии $E_{k'}$ одной эффективной релятивистской частицы массы m' [48], [51]:

$$\sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + \mathbf{k}^2} + \sqrt{m_2^2 + \mathbf{k}^2} = \frac{m'}{\mu} E_{k'}. \tag{2.2}$$

Собственно преобразования Лоренца означают трансляцию в пространстве Лобачевского, а роль плоских волн, соответствующих этим трансляциям, играют функции

$$\xi(\mathbf{p}', \mathbf{r}) = \left(\frac{E_{p'} - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{n}}{m'} \right)^{-1-irm'}, \tag{2.3}$$

где модуль радиус-вектора $\mathbf{r}$ ($\mathbf{r} = r\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| = 1$) является релятивистским инвариантом [51], причем в нерелятивистском пределе ($p' \ll 1$, $r \gg 1$) $\xi(\mathbf{p}', \mathbf{r}) \to e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}}$. Функции (2.3) соответствуют главной серии унитарных представлений группы Лоренца и удовлетворяют условиям полноты и ортогональности:

$$\begin{gathered} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\mathbf{p}'}\, \xi(\mathbf{p}', \mathbf{r}) \xi^*(\mathbf{p}', \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r}\, \xi(\mathbf{p}', \mathbf{r}) \xi^*(\mathbf{q}', \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{p}'(-)\mathbf{q}'), \end{gathered} \tag{2.4}$$

а также уравнению в терминах конечных разностей [51]

$$(2E_{p'} - \widehat{H}_0)\xi(\mathbf{p}', \mathbf{r}) = 0. \tag{2.5}$$

Здесь $\delta(\mathbf{p}'(-)\,\mathbf{q}') = \sqrt{1 + \mathbf{p}'^2/m'^2}\,\delta(\mathbf{p}' - \mathbf{q}')$ – релятивистская δ-функция в пространстве моментов; оператор

$$\widehat{H}_0 = 2m' \left[\operatorname{ch}\left(i\lambda' \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{i\lambda'}{r} \operatorname{sh}\left(i\lambda' \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\lambda'^2}{2r^2} \Delta_{\theta,\varphi} e^{i\lambda'\, \partial/\partial r} \right] \tag{2.6}$$

– оператор свободного гамильтониана, являющийся конечно-разностным оператором, построенным из операторов сдвига $e^{\pm i\lambda'\, \partial/\partial r}$, в то время как $\Delta_{\theta,\varphi}$ – его угловая часть, а $\lambda' = 1/m'$ – комптоновская длина волны, связанная с эффективной релятивистской частицей массы m'.

Отметим, что уравнение (2.1) отличается от квазипотенциального уравнения, рассмотренного в работе [15], введением в него релятивистской приведенной массы. Однако в работе [15] было показано, что можно использовать различные выражения для релятивистской приведенной массы путем выбора функциональной связи между относительным импульсом $\mathbf{k}$ и релятивистской относительной скоростью $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц, связанной с их полной энергией в СЦИ $\sqrt{s}$ хорошо известным соотношением

$$|\mathbf{v}| = 2\sqrt{\frac{s - (m_1 + m_2)^2}{s - (m_1 - m_2)^2}} \left(1 + \frac{s - (m_1 + m_2)^2}{s - (m_1 - m_2)^2} \right)^{-1}, \tag{2.7}$$

т.е. точно так же, как, например, в работах [35], [49]. В частности, если зависимость между кинетической энергией относительного движения и релятивистской относительной скоростью $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц [48], [51] дается выражением

$$\frac{\mathbf{k}'^2}{2\mu} = \mu\left(\frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} - 1\right), \tag{2.8}$$

то, принимая во внимание соотношение (2.7), это приводит к выражению (2.2). Такой выбор функциональной связи позволил ввести концепцию эффективной релятивистской частицы, выступающей в качестве двухчастичной системы и имеющей массу m', относительный 3-импульс $\mathbf{k}'$ и несущей полную энергию взаимодействующих частиц в СЦИ $\sqrt{s}$ [3)].

Волновые функции в пространстве моментов и в $\mathbf{r}$-представлении, называемом релятивистским конфигурационным представлением [48], [51], связаны между собой соотношениями

$$\psi_{q'}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\Omega_{\mathbf{p}'}\,\xi(\mathbf{p}',\mathbf{r})\Psi_{q'}(\mathbf{p}'), \qquad \Psi_{q'}(\mathbf{p}') = \int d\mathbf{r}\,\xi^*(\mathbf{p}',\mathbf{r})\psi_{q'}(\mathbf{r}). \tag{2.9}$$

Для сферически-симметричных потенциалов применение преобразований (2.9) (преобразований Шапиро или ξ-преобразований) к уравнению (2.1) позволяет получить интегральную форму релятивистского уравнения Шредингера в конфигурационном представлении:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\Omega_{\mathbf{p}'}\,(2E_{q'} - 2E_{p'})\xi(\mathbf{p}',\mathbf{r})\int d\mathbf{r}'\,\xi^*(\mathbf{p}',\mathbf{r}')\psi_{q'}(\mathbf{r}') = \\ = \frac{2\mu}{m'}V(r;E_{q'})\psi_{q'}(\mathbf{r}), \tag{2.10}$$

где правая часть уже является локальной в $\mathbf{r}$-представлении, а квазипотенциал $V(r;E_{q'})$ дается в терминах тех же релятивистских плоских волн:

$$V(r;E_{q'}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\Omega_{\mathbf{p}'}\,\xi(\mathbf{p}',\mathbf{r})\widetilde{V}(\mathbf{p}'^2;E_{q'}).$$

Данный квазипотенциал является локальным в смысле геометрии Лобачевского и в общем случае зависит параметрически от энергии $E_{q'}$ одной эффективной релятивистской частицы массы m' (подробности можно найти в работах [48], [51], [52]).

Отметим, что использование условия полноты (2.4) и уравнения (2.5) позволяет выразить левую часть уравнения (2.10) в терминах конечных разностей:

$$(2E_{q'} - \widehat{H}_0)\psi_{q'}(\mathbf{r}) = \frac{2\mu}{m'}V(r;E_{q'})\psi_{q'}(\mathbf{r}), \tag{2.11}$$

где свободный гамильтониан $\widehat{H}_0$ определен формулой (2.6).

Известно, что решения этого уравнения в принципе могут содержать произвольные функции переменной r с периодом i, так называемые i-периодические константы, которые появляются в решениях из-за конечно-разностной природы гамильтониана (2.6). Для некоторых задач, таких как определение спектра связанных состояний, эти i-периодические константы не важны. Однако для целей выделения

[3)] Напомним, что 3-импульс $\mathbf{k}'$ эффективной релятивистской частицы в силу выражения (2.8) является инвариантом преобразований Лоренца.

ресуммирующих факторов их необходимо учитывать. Следуя работе [36], мы разовьем метод, который позволяет устранить эту неоднозначность. Для этого вместо уравнения (2.11) будем рассматривать уравнение (2.10), которое можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\Omega_{\mathbf{p}}\,(2E_q-2E_p)\xi(\mathbf{p},\boldsymbol{\rho})\int d\boldsymbol{\rho}'\,\xi^*(\mathbf{p},\boldsymbol{\rho}')\psi_q(\boldsymbol{\rho}') = \\ = \frac{2\mu}{m'}V(\rho;E_q)\psi_q(\boldsymbol{\rho}),\end{aligned} \tag{2.12}$$

где “старые” и “новые” переменные связаны соотношениями

$$\begin{gathered}\mathbf{q}'=m'\mathbf{q},\quad \mathbf{p}'=m'\mathbf{p},\quad \mathbf{q}=\operatorname{sh}\chi_q\mathbf{n}_q,\quad \mathbf{p}=\operatorname{sh}\chi_p\mathbf{n}_p,\quad |\mathbf{n}_q|=|\mathbf{n}_p|=1,\\ \boldsymbol{\rho}=m'\mathbf{r},\quad \boldsymbol{\rho}'=m'\mathbf{r}',\quad d\Omega_{\mathbf{p}'}=m'^3\,d\Omega_{\mathbf{p}},\quad d\Omega_{\mathbf{p}}=\frac{d\mathbf{p}}{E_p},\quad d\mathbf{r}'=m'^{-3}\,d\boldsymbol{\rho}',\\ E_{q'}=m'E_q,\quad E_{p'}=m'E_p,\quad E_q=\sqrt{1+\mathbf{q}^2},\quad E_p=\sqrt{1+\mathbf{p}^2},\\ V(r;E_{q'})\equiv m'V(\rho;E_q),\quad \xi(\mathbf{p}',\mathbf{r})\equiv\xi(\mathbf{p},\boldsymbol{\rho})=(E_p-\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})^{-1-i\rho},\\ \psi_{q'}(\mathbf{r})\equiv\psi_q(\boldsymbol{\rho}),\quad \Psi_{q'}(\mathbf{p}')\equiv m'^{-3}\Psi_q(\mathbf{p}).\end{gathered} \tag{2.13}$$

Используя разложения релятивистских плоских волн (2.3) и волновой функции $\psi_q(\boldsymbol{\rho})$ по парциальным волнам

$$\begin{aligned}\xi(\mathbf{p},\boldsymbol{\rho}) &= \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)i^{\ell}p_\ell(\rho,\operatorname{ch}\chi_p)P_\ell\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\rho}}{p\rho}\right),\\ \psi_q(\boldsymbol{\rho}) &= \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)i^{\ell}\frac{\varphi_\ell(\rho,\chi_q)}{\rho}P_\ell\left(\frac{\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}}{q\rho}\right),\end{aligned} \tag{2.14}$$

а также формулу [37]

$$p_\ell(\rho,\operatorname{ch}\chi)=\frac{(-1)^\ell(\operatorname{sh}\chi)^\ell}{\rho^{(\ell+1)}}\left(\frac{d}{d\operatorname{ch}\chi}\right)^\ell\left(\frac{\sin\rho\chi}{\operatorname{sh}\chi}\right),$$

уравнение (2.12) можно привести к виду

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\chi'\,\frac{(\operatorname{sh}\chi')^{2\ell+2}(-1)^{\ell+1}}{\rho^{(\ell+1)}}(2\operatorname{ch}\chi-2\operatorname{ch}\chi')\left(\frac{d}{d\operatorname{ch}\chi'}\right)^\ell\left(\frac{\sin\rho\chi'}{\operatorname{sh}\chi'}\right)\times\\ \times\left(\frac{d}{d\operatorname{ch}\chi'}\right)^\ell\frac{1}{\operatorname{sh}\chi'}\int_0^\infty d\rho'\,\frac{\rho'\sin\rho'\chi'}{(-\rho')^{(\ell+1)}}\varphi_\ell(\rho',\chi)=\frac{2\mu}{m'}\frac{V(\rho;E_q)\varphi_\ell(\rho,\chi)}{\rho}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Здесь $P_\mu^\nu(z)$ – функции Лежандра первого рода, а функция

$$p_\ell(\rho,\operatorname{ch}\chi)=\sqrt{\frac{\pi}{2\operatorname{sh}\chi}}\frac{(-1)^{\ell+1}}{\rho}(-\rho)^{(\ell+1)}P^{-1/2-\ell}_{-1/2+i\rho}(\operatorname{ch}\chi) \tag{2.16}$$

является решением уравнения (2.5); χ', χ – быстроты, которые связаны с E_p, E_q соотношениями $E_p=\operatorname{ch}\chi'$, $E_q=\operatorname{ch}\chi$; функция

$$(-\rho)^{(\ell+1)}=i^{\ell+1}\frac{\Gamma(\ell+1+i\rho)}{\Gamma(i\rho)} \tag{2.17}$$

называется обобщенной степенью [37], где $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Очевидно, что уравнение (2.15) отличается от соответствующего уравнения для случая равных масс только коэффициентом $2\mu/m'$, переходящим в единицу при $m_1 = m_2$ [53].

3. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ФАКТОРЫ

Впервые решение уравнения (2.15), не содержащее i-периодических констант, при $\ell = 0$ с кулоновским потенциалом (1.1) было получено в работе [36] для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс. Этот подход привел к релятивистскому S-фактору (1.5). Отметим, что кулоновоподобный квазипотенциал (1.1) лишь формально имеет ту же форму, что и нерелятивистский. Однако в релятивистском конфигурационном представлении он отличается от нерелятивистского, поскольку применение ξ-преобразования (2.9) к кулоновскому потенциалу (1.1) дает следующее выражение для потенциала в пространстве моментов:

$$V(\mathbf{\Delta}) \sim (\chi_{\mathbf{\Delta}} \operatorname{sh} \chi_{\mathbf{\Delta}})^{-1},$$

где относительная быстрота $\chi_{\mathbf{\Delta}}$ соответствует $\mathbf{\Delta} = \mathbf{p}'(-)\mathbf{k}'$ и определяется квадратом переданного импульса $Q^2 = -(p' - k')^2 = 2(\operatorname{ch} \chi_{\mathbf{\Delta}} - 1)$. При больших Q^2 потенциал $V(\mathbf{\Delta})$ ведет себя как $(Q^2 \ln Q^2)^{-1}$, что воспроизводит главное поведение потенциала в КХД, который в лидирующем порядке пропорционален $\overline{\alpha}_{\mathrm{S}}(Q^2)/Q^2$, где $\overline{\alpha}_{\mathrm{S}}(Q^2)$ – инвариантный заряд. Тем самым аккумулируется основной эффект, обусловленный бегущей КХД-константой связи. Такое КХД-подобное поведение потенциала (1.1) в РКП-подходе, соответствующее статическому кварк-антикварковому потенциалу, впервые было отмечено в работе [38].

Для того чтобы найти решение РКП-уравнения (2.15) с кулоновоподобным квазипотенциалом (1.1), обобщим метод, предложенный в работе [36] (см. также [47], [53], [54]). Следуя этому методу, решение РКП-уравнения (2.15) с квазипотенциалом (1.1) ищем в виде

$$\varphi_\ell(\rho, \chi) = \frac{(-\rho)^{(\ell+1)}}{\rho} \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta\, e^{i\rho\zeta} R_\ell(\zeta, \chi), \tag{3.1}$$

где обобщенная степень $(-\rho)^{(\ell+1)}$ определена формулой (2.17), а ζ-интегрирование выполняется в комплексной плоскости вдоль контура с концевыми точками α_- и α_+ (см. рис. 1).

Подставляя представление (3.1) в (2.15) и принимая во внимание, что

$$\frac{1}{i\pi} \int_0^\infty d\rho' \, \sin(\rho'\chi') e^{i\rho'\zeta} = \frac{1}{i\pi} \frac{\chi'}{\chi'^2 - \zeta^2}, \qquad \operatorname{Im} \zeta > 0,$$

приходим к уравнению

$$(-1)^\ell \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta\, R_\ell(\zeta, \chi) \left(\frac{d}{d \operatorname{ch} \zeta}\right)^\ell \biggl[(\operatorname{sh} \zeta)^{2\ell+1} (2 \operatorname{ch} \chi - 2 \operatorname{ch} \zeta) \times \\ \times \left(\frac{d}{d \operatorname{ch} \zeta}\right)^\ell \left(\frac{e^{i\rho\zeta}}{\operatorname{sh} \zeta}\right)\biggr] = -\frac{2\mu\alpha}{m'\rho} \prod_{n=1}^{\ell} (\rho^2 + n^2) \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta\, e^{i\rho\zeta} R_\ell(\zeta, \chi). \tag{3.2}$$

Следует отметить, что решения этого уравнения, а значит и уравнения (2.15) уже не содержат i-периодических констант, которые появляются в решениях уравнения (2.11) из-за конечно-разностной природы гамильтониана (2.6). Также напомним, что квазипотенциал $V(\rho; E_q)$, входящий в правую часть уравнения (2.15), зависит параметрически от энергии $E_q = \operatorname{ch}\chi$ эффективной релятивистской частицы массы m' (или от ее быстроты χ). Следовательно, параметр α в уравнении (3.2) также является функцией быстроты χ.

3.1. S-фактор. Для простоты изложения рассмотрим сначала случай $\ell = 0$. Интегрирование по частям уравнения (3.2) при $\ell = 0$ приводит к уравнению

$$\frac{d}{d\zeta}\big[(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\zeta)R_0(\zeta,\chi)\big] - \frac{i\alpha\mu}{m'}R_0(\zeta,\chi) = 0 \tag{3.3}$$

с граничным условием

$$e^{i\rho\zeta}(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\zeta)R_0(\zeta,\chi)\Big|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+} = 0. \tag{3.4}$$

Решение уравнения (3.3) с граничным условием (3.4) дается выражением

$$R_0(\zeta,\chi) = -C_0(\chi)\frac{e^{\zeta}}{(e^{\zeta}-e^{\chi})^2}\left[\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi}}{e^{\zeta}-e^{\chi}}\right]^{-1+iA}, \qquad A = \frac{\alpha\mu}{m'\operatorname{sh}\chi}, \tag{3.5}$$

где $C_0(\chi)$ – произвольная функция от χ.

Значения $\zeta = \pm\chi + 2\pi n i$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, являются точками ветвления функции (3.5) (см. рис. 1). Контур интегрирования в представлении (3.1) не должен пересекать разрезы, которые проводятся от $-\infty + 2\pi n i$ до $\pm\chi + 2\pi n i$. В случае, когда взаимодействие выключено, $\alpha \to 0$, решение $\varphi_\ell(\rho,\chi)$ должно воспроизводить известную свободную волновую функцию

$$\lim_{\alpha\to 0}\varphi_\ell(\rho,\chi) = \rho p_\ell(\rho,\operatorname{ch}\chi) \underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin(\rho\chi - \pi\ell/2)}{\operatorname{sh}\chi}, \tag{3.6}$$

где функция $p_\ell(\rho,\operatorname{ch}\chi)$ определена формулой (2.16). Принимая во внимание эти замечания и граничное условие (3.4), выбираем $\alpha_- = -R - i\varepsilon$, $\alpha_+ = -R + i\varepsilon$ при

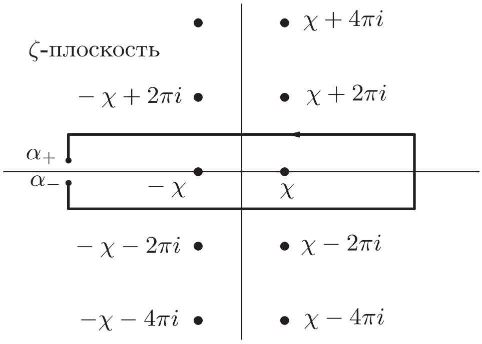

Рис. 1. Контур интегрирования в представлении (3.1) и сингулярности решений (3.5) и (3.17) в комплексной ζ-плоскости.

$R \to +\infty$, $\varepsilon \to +0$. Вертикальная часть контура интегрирования в правой его части выбрана в виде $\operatorname{Re}\zeta = +R$. Горизонтальную же часть контура интегрирования нам удобно выбрать в виде $\operatorname{Im}\zeta = \pm\pi$ (см. рис. 1), что позволит полученное нами решение в итоге выразить через гипергеометрическую функцию.

Подставляя решение (3.5) в представление (3.1) при $\ell = 0$, получаем следующее выражение для парциальной волновой РКП-функции $\varphi_0(\rho,\chi)$:

$$\varphi_0(\rho,\chi) = C_0(\chi)\frac{\rho}{\rho^{(1)}}\int_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta\, \frac{e^{(i\rho+1)\zeta}}{(e^\zeta - e^\chi)^2}\left[\frac{e^\zeta - e^{-\chi}}{e^\zeta - e^\chi}\right]^{-1+iA}, \tag{3.7}$$

где функция $\rho^{(1)}$ определена выражением (2.17), а параметр A – формулой (3.5).

Выполняя в выражении (3.7) ζ-интегрирование в комплексной плоскости вдоль контура с концевыми точками α_- и α_+ (так же, как в работе [36]), получим результирующее решение, не содержащее i-периодических констант, в форме

$$\varphi_0(\rho,\chi) = -2C_0(\chi)\frac{\rho\,\operatorname{sh}(\pi\rho)}{\rho^{(1)}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{(i\rho+1)x}}{(e^x + e^\chi)^2}\left[\frac{e^x + e^{-\chi}}{e^x + e^\chi}\right]^{-1+iA}. \tag{3.8}$$

Решение (3.8) также может быть выражено через гипергеометрическую функцию:

$$\varphi_0(\rho,\chi) = -N_0(\chi)(-\rho)^{(1)}e^{i\rho\chi+iA\chi}F(1-iA, 1-i\rho; 2; 1-e^{-2\chi}), \tag{3.9}$$

где действительный нормировочный множитель $N_0(\chi) = -2\pi C_0(\chi)e^{-\chi-iA\chi}$ находится из условия (3.6) при $\ell = 0$, а функция $(-\rho)^{(1)}$ и параметр A определены формулами (2.17) и (3.5) соответственно.

Заметим, что функция Бете–Солпитера $\chi_{\mathrm{BS}}(x=0)$ связана с волновой РКП-функцией $\Psi_q(\mathbf{p})$ соотношением (1.10). Тогда, принимая во внимание преобразования (2.9) и обозначения (2.13), ее связь с волновой РКП-функцией $\psi_q(\boldsymbol{\rho})$ дается выражением

$$\chi_{\mathrm{BS}}(x=0) = \psi_q(\boldsymbol{\rho})|_{\rho=i}.$$

Поскольку при $\rho = i$ все обобщенные степени (2.17) при $\ell \neq 0$ в представлении (3.1) обращаются в нуль, то в разложении (2.14) для волновой функции $\psi_q(\boldsymbol{\rho})$ остается только s-волна, т.е. случай $\ell = 0$. Следовательно, используя соотношения (3.9) и (3.6), вычисляем $|\psi_q(i)|^2$. Это приводит к следующему выражению для релятивистского S-фактора для случая взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс:

$$S_{\mathrm{RQP}}(\chi) = \lim_{\rho\to i}\left|\frac{\varphi_0(\rho,\chi)}{\rho}\right|^2 = \frac{X_{\mathrm{RQP}}(\chi)}{1-e^{-X_{\mathrm{RQP}}(\chi)}}, \tag{3.10}$$

где

$$X_{\mathrm{RQP}}(\chi) = \frac{2\pi\alpha\mu}{m'\operatorname{sh}\chi}, \tag{3.11}$$

а χ – быстрота, которая связана с полной энергией $\sqrt{s}$ соотношением

$$\frac{m'^2}{\mu}\operatorname{ch}\chi = \sqrt{s}. \tag{3.12}$$

3.2. P-фактор. При нахождении релятивистского P-фактора важным моментом является то, что при $\rho = i$ в разложении (2.14) для волновой функции $\psi_q(\boldsymbol{\rho})$ остается только s-волна, т.е. случай $\ell = 0$. Поэтому для p-волны релятивистский ресуммирующий P-фактор будет определяться через конечно-разностную производную от квазипотенциальной парциальной волновой функции $\varphi_1(\rho,\chi)$ при $\rho = i$ соотношением [55]

$$P_{\mathrm{RQP}}(\chi) = \lim_{\rho\to i}\left|\frac{3}{\operatorname{sh}\chi}\Delta^*\left(\frac{\varphi_1(\rho,\chi)}{\rho}\right)\right|^2, \tag{3.13}$$

где конечно-разностная производная дается выражением [37]

$$\Delta^* = \frac{1}{i}[e^{id/d\rho} - 1]. \tag{3.14}$$

Рассмотрим уравнение (3.2) при $\ell = 1$, в котором (как и в случае $\ell = 0$) выполним интегрирование по частям. Тогда получаем уравнение

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\zeta}\left\{\frac{1}{\operatorname{sh}\zeta}\,\frac{d}{d\zeta}\left[(\operatorname{sh}\zeta)^2(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\zeta)\,\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{R_1(\zeta,\chi)}{\operatorname{sh}\zeta}\right)\right]\right\} - \\ - \frac{i\alpha\mu}{m'}\left[\frac{d^2}{d\zeta^2}(R_1(\zeta,\chi)) - R_1(\zeta,\chi)\right] = 0,\end{aligned} \tag{3.15}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned}&e^{i\rho\zeta}(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\zeta)R_1(\zeta,\chi)\Big|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+} = 0,\\ &-e^{i\rho\zeta}(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\zeta)\left[\frac{\operatorname{ch}\zeta}{\operatorname{sh}\zeta}R_1(\zeta,\chi) + \operatorname{sh}\zeta\,\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{R_1(\zeta,\chi)}{\operatorname{sh}\zeta}\right)\right] + \\ &\qquad + \frac{i\alpha\mu}{m'}e^{i\rho\zeta}R_1(\zeta,\chi)\Big|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+} = 0,\\ &\frac{e^{i\rho\zeta}}{\operatorname{sh}\zeta}\,\frac{d}{d\zeta}\left[(\operatorname{sh}\zeta)^2(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\zeta)\,\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{R_1(\zeta,\chi)}{\operatorname{sh}\zeta}\right)\right] - \\ &\qquad - \frac{i\alpha\mu}{m'}e^{i\rho\zeta}\,\frac{d}{d\zeta}(R_1(\zeta,\chi))\Big|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+} = 0.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Решение уравнения (3.15) с граничными условиями (3.16) дается выражением

$$\begin{aligned}R_1(\zeta,\chi) = B_1(\chi)e^{\zeta} + B_2(\chi)e^{-\zeta} - \\ - \frac{C_1(\chi)}{2^4\operatorname{sh}^3\chi}\left\{e^{\zeta}\left[\frac{1}{1+iA}\left(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi}}{e^{\zeta}-e^{\chi}}\right)^{1+iA} - \frac{2}{iA}\left(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi}}{e^{\zeta}-e^{\chi}}\right)^{iA} + \right.\right. \\ \left. + \frac{1}{-1+iA}\left(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi}}{e^{\zeta}-e^{\chi}}\right)^{-1+iA}\right] - e^{2\chi-\zeta}\left[\frac{1}{1+iA}\left(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi}}{e^{\zeta}-e^{\chi}}\right)^{1+iA} - \right. \\ \left.\left. - \frac{2e^{-2\chi}}{iA}\left(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi}}{e^{\zeta}-e^{\chi}}\right)^{iA} + \frac{e^{-4\chi}}{-1+iA}\left(\frac{e^{\zeta}-e^{-\chi}}{e^{\zeta}-e^{\chi}}\right)^{-1+iA}\right]\right\},\end{aligned} \tag{3.17}$$

где A то же самое, что и в формуле (3.5), а $B_1(\chi)$, $B_2(\chi)$ и $C_1(\chi)$ – произвольные функции от χ.

Подставляя решение (3.17) в представление (3.1) при $\ell = 1$ и выполняя необходимые интегрирования, получаем следующее выражение для парциальной волновой РКП-функции $\varphi_1(\rho, \chi)$:

$$\varphi_1(\rho, \chi) = -C_1(\chi)\frac{\rho}{\rho^{(2)}}\int_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta\, \frac{e^{(i\rho+2)\zeta}}{(e^\zeta - e^\chi)^4}\left[\frac{e^\zeta - e^{-\chi}}{e^\zeta - e^\chi}\right]^{-2+iA}, \tag{3.18}$$

где функция $\rho^{(2)}$ определена формулой (2.17). Далее, выполняя в выражении (3.18) ζ-интегрирование в комплексной плоскости вдоль контура с концевыми точками α_- и α_+ (т.е. так же, как и в случае s-волны), получаем результирующее решение, не содержащее i-периодических констант, в форме

$$\varphi_1(\rho, \chi) = -2C_1(\chi)\frac{\rho\,\mathrm{sh}(\pi\rho)}{\rho^{(2)}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{(i\rho+2)x}}{(e^x + e^\chi)^4}\left[\frac{e^x + e^{-\chi}}{e^x + e^\chi}\right]^{-2+iA}. \tag{3.19}$$

Решение (3.19) также может быть представлено через гипергеометрическую функцию:

$$\varphi_1(\rho, \chi) = N_1(\chi)(-\rho)^{(2)}e^{i\rho\chi+iA\chi}F(2 - iA, 2 - i\rho; 4; 1 - e^{-2\chi}), \tag{3.20}$$

где действительный нормировочный множитель $N_1(\chi) = -(\pi/3)C_1(\chi)e^{-2\chi-iA\chi}$ находится из условия (3.6) при $\ell = 1$, а обобщенная степень $(-\rho)^{(2)}$ определена формулой (2.17). Наконец, используя определения (3.13) и (3.14), решение (3.20) и условие (3.6), находим следующее выражение для релятивистского P-фактора в случае взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс:

$$P_{\mathrm{RQP}}(\chi) = \left[1 + \left(\frac{\alpha\mu}{m'\,\mathrm{sh}\,\chi}\right)^2\right]S_{\mathrm{RQP}}(\chi), \tag{3.21}$$

где $S_{\mathrm{RQP}}(\chi)$ дается выражением (3.10).

3.3. ***L*-фактор.** Для d-волны ($\ell = 2$) релятивистский ресуммирующий D-фактор определяется соотношением

$$D_{\mathrm{RQP}}(\chi) = \lim_{\rho\to i}\left|\frac{\Gamma(6)}{(2\,\mathrm{sh}\,\chi)^2\Gamma^2(3)}(\Delta^*)^2\left[\frac{\varphi_2(\rho, \chi)}{\rho}\right]\right|^2, \tag{3.22}$$

где парциальная волновая функция $\varphi_2(\rho, \chi)$ находится через решение уравнения (3.2) при $\ell = 2$ подобно случаям $\ell = 0$ и 1. Это приводит к следующему выражению:

$$\varphi_2(\rho, \chi) = -N_2(\chi)(-\rho)^{(3)}e^{i\rho\chi+iA\chi}F(3 - iA, 3 - i\rho; 6; 1 - e^{-2\chi}). \tag{3.23}$$

Действительный нормировочный множитель $N_2(\chi)$ находится из условия (3.6) при $\ell = 2$, а функция $(-\rho)^{(3)}$ и параметр A определены выражениями (2.17) и (3.5) соответственно. Используя соотношения (3.14), (3.22) и (3.23), находим искомое выражение для релятивистского D-фактора:

$$D_{\mathrm{RQP}}(\chi) = \prod_{n=1}^{2}\left[1 + \left(\frac{\alpha\mu}{nm'\,\mathrm{sh}\,\chi}\right)^2\right]S_{\mathrm{RQP}}(\chi), \tag{3.24}$$

где релятивистский S-фактор $S_{\mathrm{RQP}}(\chi)$ дается выражением (3.10).

Проведенное выше изложение метода вывода новых S-, P- и D-факторов позволяет, решив уравнение (3.2), найти выражение (не содержащее i-периодических констант) для произвольной парциальной волновой функции $\varphi_\ell(\rho,\chi)$ и затем выразить его через гипергеометрическую функцию:

$$\varphi_\ell(\rho,\chi) = N_\ell(\chi)(-\rho)^{(\ell+1)} e^{i\rho\chi + iA\chi + i\pi(\ell+1)} \times \\ \times F(\ell+1-iA, \ell+1-i\rho; 2\ell+2; 1-e^{-2\chi}). \tag{3.25}$$

Здесь нормировочный множитель $N_\ell(\chi)$ находится из условия (3.6), а обобщенная степень $(-\rho)^{(\ell+1)}$ и параметр A определяются выражениями (2.17) и (3.5) соответственно.

Релятивистский ресуммирующий пороговый фактор для произвольного орбитального момента $\ell \geqslant 0$ определяется через конечно-разностную производную (3.14) выражением [45], [46], [53]

$$L_{\mathrm{RQP}}(\chi) = \lim_{\rho\to i}\left|\frac{\Gamma(2\ell+2)}{(2\operatorname{sh}\chi)^\ell\Gamma^2(\ell+1)}(\Delta^*)^\ell\left[\frac{\varphi_\ell(\rho,\chi)}{\rho}\right]\right|^2. \tag{3.26}$$

Теперь, используя соотношения (3.14), (3.25) и (3.26), получаем выражение для релятивистского L-фактора для произвольного орбитального момента $\ell \geqslant 0$ в случае взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс:

$$L_{\mathrm{RQP}}(\chi) = \prod_{n=1}^{\ell}\left[1 + \left(\frac{\alpha\mu}{nm'\operatorname{sh}\chi}\right)^2\right] S_{\mathrm{RQP}}(\chi), \tag{3.27}$$

где быстрота χ связана с полной энергией $\sqrt{s}$ соотношением (3.12).

4. СВОЙСТВА L-ФАКТОРА

Покажем, что фактор (3.27) можно формально привести к виду, который имеет нерелятивистский фактор (1.2). Для этого рассмотрим квадрат относительного 3-импульса $\mathbf{k}'$ эффективной релятивистской частицы, имеющей массу m' и выступающей в качестве двухчастичной системы, связанный с полной энергией взаимодействующих частиц в СЦИ $\sqrt{s}$ и с релятивистской относительной скоростью $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц выражениями (2.2) и (2.8). Обратно, из соотношений (2.2) и (2.8) следует, что релятивистская относительная скорость $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц выражается через их полную энергию в СЦИ $\sqrt{s}$ соотношением (2.7). Отсюда, принимая во внимание определение скорости (1.9), находим

$$|\mathbf{v}| = \frac{2u}{1+u^2}. \tag{4.1}$$

Тогда из выражений (2.8) и (4.1) следует

$$\mathbf{k}'^2 = \mu^2(u'_{\mathrm{rel}})^2, \tag{4.2}$$

где μ – приведенная масса, а относительная скорость u'_{rel} эффективной релятивистской частицы массы m', выступающей в качестве двухчастичной системы, определяется выражением

$$u'_{\mathrm{rel}} = \frac{2u}{\sqrt{1-u^2}}. \tag{4.3}$$

Этот результат отражает физический смысл уравнения (2.1), которое является релятивистским обобщением уравнения Шредингера в духе геометрии Лобачевского. Подчеркнем, что как 3-импульс $\mathbf{k}'$, так и скорость (4.3) эффективной релятивистской частицы в силу выражений (2.8) и (4.2) являются инвариантами преобразований Лоренца. Тем самым функция $X_{\mathrm{RQP}}(\chi)$ в формуле (3.10) выражается в терминах относительной скорости u'_{rel} эффективной релятивистской частицы, определяемой формулой (4.3), как

$$X_{\mathrm{RQP}}(u'_{\mathrm{rel}}) = \frac{2\pi\alpha}{u'_{\mathrm{rel}}}. \tag{4.4}$$

Таким образом, в терминах относительной скорости эффективной релятивистской частицы релятивистский S-фактор (3.10) и, как обобщение, L-фактор (3.27) ($\ell \geqslant 0$) даются выражениями

$$S_{\mathrm{RQP}}(u'_{\mathrm{rel}}) = \frac{X_{\mathrm{RQP}}(u'_{\mathrm{rel}})}{1 - e^{-X_{\mathrm{RQP}}(u'_{\mathrm{rel}})}}, \tag{4.5}$$

$$L_{\mathrm{RQP}}(u'_{\mathrm{rel}}) = \prod_{n=1}^{\ell}\left[1 + \left(\frac{\alpha}{n u'_{\mathrm{rel}}}\right)^2\right] S_{\mathrm{RQP}}(u'_{\mathrm{rel}}). \tag{4.6}$$

Отметим, что фактор (4.6) лишь формально имеет ту же форму, что и нерелятивистский фактор (1.2). Тем не менее фактор (4.6) имеет явно выраженный релятивистский характер, поскольку как аргумент r (модуль радиус-вектора $\mathbf{r}$) в кулоновском потенциале (1.1), так и релятивистская относительная скорость $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц (см. работу [51]) являются релятивистскими инвариантами. Значит, в силу соотношений (2.8) и (4.2) и скорость эффективной релятивистской частицы (4.3) также обладает этим свойством.

Релятивистские пороговые ресуммирующие факторы (4.5) и (4.6) имеют следующие важные свойства.

• В нерелятивистском пределе $u \ll 1$ они воспроизводят известные нерелятивистские результаты.

• В релятивистском пределе $u \to 1$ факторы (4.5) и (4.6) стремятся к единице.

• Для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс факторы (4.5) и (4.6) совпадают с S- и L-факторами (1.5) и (1.6).

• Случай, когда одна из частиц покоится, означает, что $m_1 \to \infty$. Это дает следующее предельное выражение для скорости u:

$$u \xrightarrow[m_1\to\infty]{} \frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{m_2^2 + \mathbf{k}^2} + m_2}.$$

• В ультрарелятивистском пределе, как было показано в работах [56], спектр связанных состояний исчезает, когда масса $m' \to 0$, так как масса частицы является единственным размерным параметром. Эта особенность отражает существенное различие между потенциальными моделями и КТП, где появляется дополнительный размерный параметр Λ. Поэтому можно заключить, что S- и L-факторы, которые соответствуют непрерывному спектру, при $m' \to 0$ должны стремиться к единице. Тем самым в отличие от нерелятивистского случая релятивистские пороговые

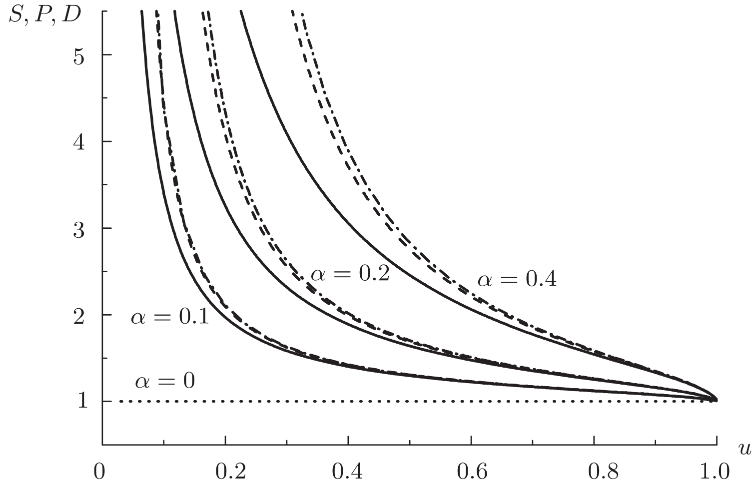

Рис. 2. Поведение релятивистских S-, P- и D-факторов как функций переменной u при различных значениях α. S-фактору (4.5) соответствует сплошная линия, а штриховая и штрихпунктирная линии – релятивистским P- и D-факторам, которые определяются выражением (4.6) при $\ell = 1$ и $\ell = 2$ соответственно. Пунктирная линия соответствует значению $\alpha = 0$.

ресуммирующие S- и L-факторы (4.5) и (4.6) воспроизводят как известный нерелятивистский, так и ожидаемый ультрарелятивистский пределы $S, L \to 1$. Следует подчеркнуть, что такое ультрарелятивистское поведение S- и L-факторов (4.5) и (4.6) приводит к такому выражению для отношения Дрелла $R(s)$, из которого следует, что в случае векторного и аксиально-векторного кварковых токов поправки по α_{S} становятся асимптотически равными и воспроизводится известная безмассовая формула: $R(s) \sim 1 + \alpha_{\text{S}}/\pi$ (см. работу [55]).

Для того чтобы проиллюстрировать поведение L-фактора при различных ℓ, на рис. 2 показаны релятивистские S-, P- и D-факторы как функции переменной u при различных значениях α. Видно, что в области вблизи порога рождения кварковой пары (при нерелятивистских значениях $u \lesssim 0.2$) влияние этих факторов наиболее сильное и зависит от значения α. С ростом же значений u зависимость от α ослабевает, и все кривые приближаются к единице.

Рис. 3 демонстрирует различия в поведении релятивистского и нерелятивистского P-факторов как функций переменной u при различных значениях α. При этом поведение релятивистских и нерелятивистских S- и D-факторов как функций переменной u при различных значениях α имеет тот же характер, что и поведение релятивистского и нерелятивистского P-факторов. Видно, что полученный релятивистский L-фактор в области нерелятивистских значений $u \lesssim 0.2$, где его влияние велико, фактически совпадает с его нерелятивистским аналогом (1.2). Однако с увеличением значения u различие в поведении релятивистского и нерелятивистского L-факторов становится все более существенным, особенно при значениях u, близких к единице.

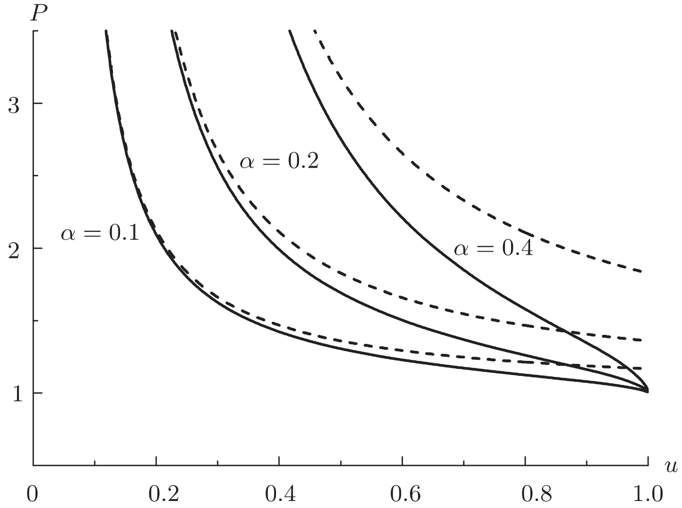

Рис. 3. Поведение P-фактора как функции переменной u при различных значениях α. Сплошные линии соответствуют релятивистскому выражению (4.6) при $\ell = 1$, а штриховые линии – нерелятивистскому.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получен новый релятивистский ресуммирующий L-фактор (4.6) для произвольного орбитального момента $\ell \geqslant 0$ в случае взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс. Для этой цели была использована формулировка квазипотенциального метода в трехмерном релятивистском конфигурационном представлении [48] для системы взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс с кулоновоподобным квазипотенциалом.

Релятивистский L-фактор (4.6) воспроизводит известное нерелятивистское поведение при малых скоростях u. В то же время этот фактор дает ожидаемый ультрарелятивистский предел ($u \to 1$), равный единице, что позволяет воспроизвести известную безмассовую формулу для отношения Дрелла $R(s)$.

По форме релятивистский L-фактор (4.6) совпадает с его нерелятивистским аналогом (1.2), однако роль параметра скорости в выражении (4.6) играет не релятивистская относительная скорость $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц, а определяемая выражением (4.3) скорость эффективной релятивистской частицы, выступающей в качестве двухчастичной системы.

Выполненный анализ показал (см. рис. 2), что при нерелятивистских значениях $u \lesssim 0.2$ величина этого фактора при любых значениях $\ell \geqslant 0$ существенно больше единицы, т.е. его влияние в этой области наиболее сильное и зависит от значения α. С ростом же значений u зависимость от α ослабевает, и все кривые приближаются к единице. Также было показано, что имеется существенное отличие (см. рис. 3) в поведении нового выражения (4.6) от поведения его нерелятивистского аналога (1.2).

Поскольку L-фактор (4.6) получен нами в рамках полностью ковариантного метода, то можно ожидать, что он более полно учитывает релятивистский характер взаимодействующих частиц.

Благодарности. Авторы выражают искреннюю благодарность Д. В. Ширкову и Р. Н. Фаустову за проявленный интерес к работе и ценные замечания, Ю. С. Вернову и М. Н. Мнацакановой за поддержку и полезные обсуждения, а также А. Е. Дорохову, А. В. Киселеву и И. С. Сацункевичу за стимулирующие дискуссии. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-01-00686), гранта БелРФФИ-ОИЯИ-2010 и ГПФИ “Поля и частицы".

Список литературы

[1] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze, *Nuovo Cimento*, **29**:2 (1963), 380–399.

[2] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze, I. T. Todorov, O. A. Khrustalev, *Nuovo Cimento*, **30**:1 (1963), 134–142.

[3] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze, O. A. Khrustalev, *Phys. Lett.*, **4**:6 (1963), 325–326.

[4] Б. А. Арбузов, А. А. Логунов, А. Н. Тавхелидзе, Р. Н. Фаустов, А. Т. Филиппов, *ЖЭТФ*, **44** (1963), 1409.

[5] В. Г. Кадышевский, А. Н. Тавхелидзе, “Квазипотенциальный метод в релятивистской задаче двух тел”, *Проблемы теоретической физики*, Сборник, посвященный 60-летию Н. Н. Боголюбова, Наука, М., 1969.

[6] Р. Н. Фаустов, *ТМФ*, **3**:2 (1970), 240–254; *ЭЧАЯ*, **3**:1 (1972), 238–268; *Ann. Phys.*, **78**:1 (1973), 176–189.

[7] П. Н. Боголюбов, *ТМФ*, **5**:2 (1970), 244–252.

[8] А. А. Логунов, В. И. Саврин, Н. Е. Тюрин, О. А. Хрусталев, *ТМФ*, **6**:2 (1971), 157–165.

[9] В. Р. Гарсеванишвили, А. Н. Квинихидзе, В. А. Матвеев, А. Н. Тавхелидзе, Р. Н. Фаустов, *ТМФ*, **23**:3, 310–321.

[10] V. G. Kadyshevsky, *Nucl. Phys. B*, **6**:2 (1968), 125–148.

[11] V. G. Kadyshevsky, M. D. Mateev, *Nuovo Cimento A*, **55**:2 (1968), 275–300.

[12] В. Г. Кадышевский, *ЖЭТФ*, **46**:2 (1964), 654–662; **46**:3 (1964), 872–883; *ДАН СССР*, **160**:3 (1965), 573–574.

[13] Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, *ЯФ*, **30**:4 (1979), 1079–1088; **31**:5 (1980), 1332–1340; *ТМФ*, **43**:3 (1980), 330–342; **54**:2 (1983), 183–192.

[14] V. N. Kapshay, A. D. Linkevich, N. B. Skachkov, V. I. Savrin, *Nuovo Cimento A*, **66**:1 (1981), 45–62; А. Д. Линкевич, В. И. Саврин, Н. Б. Скачков, *ТМФ*, **53**:1 (1982), 20–31; *ЯФ*, **37** (1983), 391–399; А. Д. Линкевич, В. И. Саврин, В. В. Санадзе, Н. Б. Скачков, *ЯФ*, **37** (1983), 959–965.

[15] А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, *ТМФ*, **64**:2 (1985), 179–185.

[16] Б. А. Арбузов, Э. Э. Боос, В. И. Саврин, С. А. Шичанин, *ТМФ*, **83**:2 (1990), 175–185.

[17] В. А. Матвеев, В. И. Саврин, А. Н. Сисакян, А. Н. Тавхелидзе, *ТМФ*, **132**:2 (2002), 267–287.

[18] А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, *ЯФ*, **61**:3 (1998), 534–539; **63**:5 (2000), 915–919; **64**:7 (2001), 1358–1363.

[19] D. Ebert, R. N. Faustov, V. O. Galkin, *Phys. Rev. D*, **62**:3 (2000), 034014, 11 pp., arXiv: hep-ph/9911283; **67**:1 (2003), 014027, 19 pp., arXiv: hep-ph/0210381; **72**:3 (2005), 034026, 7 pp., arXiv: hep-ph/0504112; **75**:7 (2007), 074008, 15 pp., arXiv: hep-ph/0611307; *Modern Phys. Lett. A*, **20**:25 (2005), 1887–1893, arXiv: hep-ph/0503238; *Phys. Lett. B*, **634**:2–3 (2006), 214–219, arXiv: hep-ph/0512230; **659**:3 (2008), 612–620, arXiv: 0705.2957.

[20] Н. М. Атакишиев, Р. М. Мир-Касимов, Ш. М. Нагиев, *ТМФ*, **44**:1, 47–62.

[21] Е. А. Дей, В. Н. Капшай, Н. Б. Скачков, *ТМФ*, **69**:1 (1986), 55–68; **82**:2 (1990), 188–198.

[22] Л. Д. Блохинцев, А. М. Мухамеджанов, А. Н. Сафронов, *ЭЧАЯ*, **15**:6 (1984), 1296–1337.

[23] М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979.

[24] G. Gamov, *Z. Phys.*, **51**:3–4 (1928), 204–212.

[25] А. Зоммерфельд, *Строение атома и спектры*, т. 2, Гостехиздат, М., 1956.

[26] А. Д. Сахаров, *ЖЭТФ*, **18**:7 (1948), 631–635.

[27] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. III: *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, 2-е изд., Физматлит, М., 1963.

[28] Р. Ньютон, *Теория рассеяния волн и частиц*, Мир, М., 1969.

[29] T. Appelquist, H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.*, **34**:1 (1975), 43–45; *Phys. Rev. D*, **12**:5 (1975), 1404–1414.

[30] E. C. Poggio, H. R. Quinn, S. Weinberg, *Phys. Rev. D*, **13**:7 (1976), 1958–1968.

[31] В. Н. Байер, В. С. Фадин, *ЖЭТФ*, **57**:1(7) (1969), 225–231.

[32] В. С. Фадин, В. А. Хозе, *ЯФ*, **48** (1988), 487–493; V. S. Fadin, V. A. Khoze, T. Sjöstrand, *Z. Phys. C*, **48**:4 (1990), 613–621.

[33] V. S. Fadin, V. A. Khoze, A. D. Martin, A. Chapovsky, *Phys. Rev. D*, **52**:3 (1995), 1377–1385, arXiv: hep-ph/9501214.

[34] A. H. Hoang, *Phys. Rev. D*, **56**:11 (1997), 7276–7283, arXiv: hep-ph/9703404.

[35] J.-H. Yoon, C.-Y. Wong, *Phys. Rev. C*, **61**:4 (2000), 044905, 10 pp., arXiv: nucl-th/9908079; *J. Phys. G*, **31**:2 (2005), 149–160, arXiv: nucl-th/0412019.

[36] K. A. Milton, I. L. Solovtsov, *Modern Phys. Lett. A*, **16**:34 (2001), 2213–2219, arXiv: hep-ph/0005175.

[37] V. G. Kadyshevsky, R. M. Mir-Kasimov, N. B. Skachkov, *Nuovo Cimento A*, **55**:2 (1968), 233–257.

[38] V. I. Savrin, N. B. Skachkov, *Nuovo Cimento Lett.*, **29**:11 (1980), 363–369; *Preprint TH*.2822-*CERN*, CERN, Geneva, 1980.

[39] B. Durand, L. Durand, *Phys. Rev. D*, **28**:2 (1983), 396–406.

[40] M. Freeman, M. D. Mateev, R. M. Mir-Kasimov, *Nucl. Phys. B*, **12**:1 (1969), 197–215.

[41] В. Н. Капшай, Н. Б. Скачков, *ТМФ*, **55**:2 (1983), 236–245.

[42] K. A. Milton, I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova, *Phys. Rev. D*, **64**:1 (2001), 016005, 6 pp., arXiv: hep-ph/0102254.

[43] I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova, *Nonlin. Phenom. Complex Syst.*, **5** (2002), 51–58.

[44] K. A. Milton, I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova, *Modern Phys. Lett. A*, **21**:17 (2006), 1355–1368, arXiv: hep-ph/0512209.

[45] И. Л. Соловцов, Ю. Д. Черниченко, *Весці Нац. Акад. Навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук*, **2** (2007), 103.

[46] И. Л. Соловцов, Ю. Д. Черниченко, *Актуальные проблемы физики микромира*, Труды Международной школы-семинара (28 июля–8 августа 2007 г., Гомель, Белоруссия), т. 2, ОИЯИ, Дубна, 2008, 33, E2-2008-64.

[47] О. П. Соловцова, Ю. Д. Черниченко, *ЯФ*, **73** (2010), 1–16, arXiv: 0904.0754.

[48] В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов, *ЯФ*, **11**:3 (1970), 692–700.

[49] A. B. Arbuzov, *Nuovo Cimento A*, **107**:8 (1994), 1263–1273.

[50] R. Barbieri, P. Christillin, E. Remiddi, *Phys. Rev. A*, **8**:5 (1973), 2266–2271.

[51] В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков, *ЭЧАЯ*, **2**:3 (1972), 635–690.

[52] В. Н. Капшай, В. И. Саврин, Н. Б. Скачков, *ТМФ*, **69**:3 (1986), 400–410.

[53] И. Л. Соловцов, Ю. Д. Черниченко, Международный семинар по современным вопросам физики элементарных частиц, посвященный памяти И. Л. Соловцова. Труды семинара (Дубна, 17–18 янв. 2008), 2008, 73, Д4-2008-65.

[54] Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, *ТМФ*, **54**:2 (1983), 183–192.

[55] И. Л. Соловцов, О. П. Соловцова, Ю. Д. Черниченко, *Письма в ЭЧАЯ*, **2**:4(127) (2005), 17–23.

[56] W. Lucha, F. F. Schöberl, *Phys. Rev. Lett.*, **64**:23 (1990), 2733–2735; *Phys. Lett. B*, **387**:3 (1996), 573–576, arXiv: hep-ph/9607249.

Поступила в редакцию 14.07.2010