Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Д. М. ВОЛКОВ

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ИМЕЮЩЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 2 III 1953)

Уравнения гидравлического удара в трубах переменного сечения и переменной толщины стенок представляют собой гиперболическую систему с двумя искомыми функциями с коэффициентами, зависящими от координаты x, отсчитываемой вдоль оси трубопровода [1]. Если пренебречь нелинейными членами (слабо пульсирующий трубопровод с гладкими стенками), исключить одну из искомых функций и перейти к характеристикам, то получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} = B(\xi+\eta)\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \tag{1}$$

Здесь

$$\xi = \frac{\bar{x}-t}{2}; \quad \eta = \frac{\bar{x}+t}{2}; \quad \bar{x} = \int_0^x \frac{dx}{a(x)};$$

$a(x)$ — скорость распространения удара, определяемая по известной формуле Жуковского [1]. Коэффициент $B(\xi+\eta) = B(\bar{x})$ характеризует физические свойства трубопровода [1].

Будем искать решение уравнения (1) в виде следующих характеристических волн:

$$\begin{aligned} u &= \sum_\nu g_\nu(\xi+\eta)\frac{d^\nu\varphi(\xi)}{d\xi^\nu} = \sum_\nu g_\nu(\bar{x})\frac{d^\nu\varphi(\xi)}{d\xi^\nu}; \\ v &= \sum_\nu g_\nu(\xi+\eta)\frac{d^\nu\psi(\eta)}{d\eta^\nu} = \sum_\nu g_\nu(\bar{x})\frac{d^\nu\psi(\eta)}{d\eta^\nu}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ — произвольные достаточно гладкие функции.

Подстановка (2) в (1) приводит к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является необходимым и достаточным условием существования решений вида (2) с произвольными $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$:

$$g''_{\nu+1}(\bar{x}) - 2B(\bar{x})\,g'_{\nu+1}(\bar{x}) = B(\bar{x})\,g_\nu(\bar{x}) - g'_\nu(\bar{x}). \tag{3}$$

Считая, что $g(\bar{x}) \equiv 0$ при $\nu < 0$ и при $\nu > N$, из уравнений (3) найдем:

$$g_0(\bar{x}) = \alpha_0 \int_0^{\bar{x}} e^{2\int_0^{\bar{x}} B(\bar{x})\, d\bar{x}} d\bar{x} + \beta;$$

$$g_N(\bar{x}) = \alpha_{N+1} e^{\int_0^{\bar{x}} B(\bar{x})\, d\bar{x}}; \tag{4}$$

$$g_\nu(\bar{x}) = e^{\int_0^{\bar{x}} B(\bar{x})\, d\bar{x}} \left\{ \alpha_{\nu+1} + \int_0^{\bar{x}} [2B(\bar{x})\, g'_{\nu+1}(\bar{x}) - g''_{\nu+1}(\bar{x})]\, e^{-\int_0^{\bar{x}} B(\bar{x})\, d\bar{x}} d\bar{x} \right\} = P_{\nu+1} g_{\nu+1}.$$

Здесь $\alpha_{\nu+1}$, β — произвольные параметры.

Чтобы равенства (4) не были противоречивы, в частности, чтобы $g_0(\bar{x})$ было одним и тем же, на $B(\bar{x})$ должно быть наложено ограничение:

$$g_0(\bar{x}) = \alpha_0 \int_0^{\bar{x}} e^{2\int_0^{\bar{x}} B(\bar{x})\, d\bar{x}} d\bar{x} + \beta = P_1 P_2 P_3 \ldots P_N \alpha_{N+1} e^{\int_0^{\bar{x}} B(\bar{x})\, d\bar{x}}. \tag{5}$$

Оператор $P_{\nu+1}$ ясно выписан выше. Необходимое и достаточное условие (5) дает, очевидно, класс труб, зависящий от $N+2$ произвольных параметров, где N находится в нашем распоряжении.

Детальное изучение полученного класса труб при $N = 1, 2, 3$ проводится элементарно.

Так как мы исходили из необходимых и достаточных условий, то ранее найденные классы труб ([1-3]) здесь содержатся. Кроме того, условие (5) дает новые случаи интегрируемости в конечном виде известного в гидродинамике уравнения Дарбу.

Если коэффициент $B(\bar{x})$ взять совершенно произвольным (интегрируемая функция), то выбор $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ должен обеспечить соответствующую сходимость рядов (2). После такого ограничения упомянутые функции остаются довольно произвольными, например, в качестве $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ можно брать любые полиномы, так что волны вида (2) существуют в любом трубопроводе.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Поступило 27 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. М. Волков, И. П. Гинзбург, Вестн. Ленингр. ун-та, № 6 (1952). [2] А. А. Гриб, ДАН, **83**, № 1 (1952). [3] С. В. Валландер, ДАН, **83**, № 5 (1952).