Доклады Академии Наук СССР
1953. Том CX, № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. А. КИСЕЛЕВ

О РАЦИОНАЛЬНОЙ ОСИ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК ПОДВОДНЫХ ТОННЕЛЕЙ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 16 III 1953)

Рассмотрим подводный тоннель, изображенный схематично на рис. 1. Тоннель будем считать длинным и находящимся в одинаковых условиях по длине, т. е. задачу будем рассматривать как плоскую.

Рациональной осью будем называть такую ось, при которой изгибающие моменты во всех сечениях арки равны нулю.

Чтобы избежать больших сложностей при решении задачи и дать решение, доступное для практического применения, пренебрегаем некоторыми факторами второстепенного значения, что будет видно по ходу изложения.

Для дальнейших расчетов выделим из тоннеля арку шириной 1 м и рассмотрим условия равновесия элементарного клина арки (рис. 2). Собственный вес арки будем считать приложенным к ее оси.

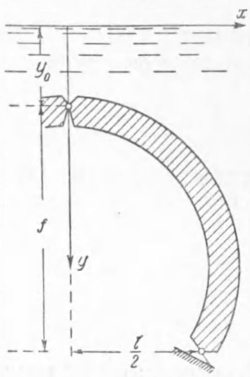

Рис. 1

Сумма моментов относительно центра кривизны элемента бруса дает следующее выражение:

$$dN = \gamma_1 \mathrm{F}\, dy,$$

откуда

$$N = N_0 + \gamma_1 \mathrm{F}\,(y - y_0), \tag{1}$$

где N — продольная сила арки в тоннах; N_0 — значение N при $y = y_0$; F — площадь сечения арки в м²; γ_1 — объемный вес материала арки в тн / м³.

Сумма проекций на биссектрису угла $d\alpha$ дает

$$Nd\alpha = 1\cdot\gamma\,(y - c\,\cos\alpha)(\rho + c)\,d\alpha + \gamma_1 \mathrm{F}\,ds\cos\alpha,$$

откуда

$$\overline{N}_0 - py_0 = y\,(\rho + c - p) + \rho\cos\alpha\,(p - c) - c^2\cos\alpha; \tag{2}$$

γ — объемный вес давящей жидкости в тн / м³; ρ — радиус кривизны $\overline{N}_0 = \frac{N_0}{1\cdot\gamma}$ в м² и $p = \frac{\gamma_1 \mathrm{F}}{\gamma\cdot 1}$ в м — условные величины.

Уравнение (2) можно рассматривать как дифференциальное уравнение искомой рациональной оси арки. Однако в таком виде оно представляет большие сложности для интегрирования.

Рассмотрим вместо оси арки кривую, ей параллельную: $\eta = f(\xi)$, связанную с осью арки зависимостями

$$\bar{\rho} = \rho - (p - c);$$
$$\xi = x - (p - c)\sin\alpha, \quad \eta = y + (p - c)\cos\alpha, \tag{3}$$

где $\bar{\rho}$ — радиус кривизны новой параллельной кривой, ξ и η — ее координаты.

Теперь уравнение (2) можем представить так:

$$\bar{N}_0 - p\eta_0 + p(p - c) = \eta\bar{\rho} + p(p - 2c)\cos\alpha. \tag{4}$$

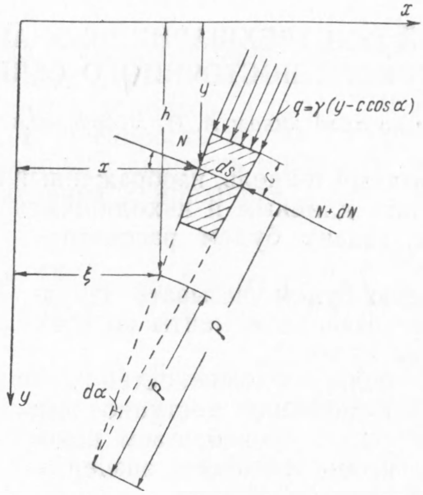

Рис. 2. c — расстояние до центра тяжести сечений

Полученное уравнение значительно проще уравнения (2). Запишем его в виде

$$D = \eta\frac{d\eta}{\sin\alpha\, d\alpha} + p(p - 2c)\cos\alpha, \tag{5}$$

где

$$D = \bar{N}_0 - p\eta_0 + p(p - c).$$

Интегрируя, получаем

$$D(1 - \cos\alpha) = \frac{\eta^2 - \eta_0^2}{2} + \frac{p(p - 2c)}{2}\sin^2\alpha,$$

откуда точное значение η будет

$$\eta = \sqrt{\eta_0^2 + 2D(1 - \cos\alpha) - p(p - 2c)\sin^2\alpha}. \tag{6}$$

Точное значение $\bar{\rho}$ получим из (4):

$$\bar{\rho} = [D - p(p - 2c)\cos\alpha] : \sqrt{\eta_0^2 + 2D(1 - \cos\alpha) - p(p - 2c)\sin^2\alpha}. \tag{7}$$

Абсциссу параллельной кривой получим из соотношения $d\xi = \frac{d\eta}{\operatorname{tg}\alpha}$, что дает:

$$\xi = \int_0^\alpha \frac{D\cos\alpha - p(p - 2c)\cos^2\alpha}{\sqrt{\eta_0^2 + 2D(1 - \cos\alpha) - p(p - 2c)\sin^2\alpha}}\, d\alpha. \tag{8}$$

Значение полученного интеграла может быть подсчитано по одному из приближенных приемов вычисления определенных интегралов. Однако такой путь удобен лишь тогда, когда начальная продольная сила N_0 известна, а не является искомым параметром уравнения, определяемым из условия прохождения оси арки через пятовую точку, что обычно как раз и имеет место в практических расчетах. Поэтому будем искать хотя бы приближенное, но замкнутое решение данной задачи.

Для этого представим интеграл (8) так:

$$\xi=\int_0^\alpha \frac{[D-p(p-2c)\mu]\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\eta_0^2+2\left[D-\frac{p(p-2c)}{2}-\frac{p(p-2c)}{2}\mu\right](1-\cos\alpha)}}, \tag{9}$$

где $\mu=\cos\alpha$ при интегрировании будем считать величиной постоянной.

Так как величина $D \gg p(p-2c)$ по смыслу решаемой задачи, то можно показать, что при значительных изменениях α (примерно α от 0 до 120—130°), полагая $\mu=\cos\alpha$ той точки, для которой вычисляется ξ, можно получить значение ξ с избытком, а при $\mu=1$ с недостатком. Таким образом, истинное значение ξ будет заключено между двумя достаточно близкими пределами.

Проведенные исследования показали, что кривая с $\mu=1$ лежит ближе к действительной кривой, а уравнение кривой при этом получается наиболее простым.

С хорошим приближением можно положить $\mu=\frac{1+\cos\alpha}{2}$, где α — угол наклона касательной в точке, для которой производится определение координаты ξ.

Далее, применяя подстановку:

$$\cos\alpha=2\sin^2\varphi-1, \quad \varphi=90°-\frac{\alpha}{2},$$

интеграл (9) получим в решенном виде:

$$\xi=\frac{\eta_0}{\sqrt{1-k^2}}\{A_1[F-F(k,\varphi)]-A_2[E-E(k,\varphi)]\}. \tag{10}$$

Окончательно получаем уравнение оси арки:

$$x=\frac{y_0+p-c}{\sqrt{1-k^2}}\{A_1[F-F(k,\varphi)]-A_2[E-E(k,\varphi)]\}+(p-c)\sin 2\varphi, \tag{11}$$

$$y=(y_0+p-c)\sqrt{\frac{1-k_1^2\sin^2\varphi}{1-k_1^2}-\frac{p(p-2c)}{(y_0+p-c)^2}\sin^2 2\varphi}+(p-c)\cos 2\varphi, \tag{12}$$

где

$$A_1=\frac{2-k^2}{2}+\frac{1-k^2}{(y_0+p-c)^2}\left(\frac{2Б}{k^2}-Б\right),$$

$$A_2=1+\frac{1-k^2}{k^2(y_0+p-c)}2Б,$$

$$Б=p(p-2c)(1-\mu), \quad \mu=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\sin^2\varphi,$$

$$k^2=4B:[(y_0+p-c)^2+4B],$$

$$B=\overline{N}_0-p(y_0+p-c)+\frac{p^2}{2}-p\frac{(p-2c)}{2}\mu,$$

$$k_1^2=4D:[(y_0+p-c)^2+4D]; \quad D=B+\frac{p(p-2c)}{2}(1+\mu);$$

$F(k, \varphi)$ и $E(k, \varphi)$ — эллиптические интегралы, а F и E — их полные значения.

Параметр уравнения оси арки k^2 подбирается по условию прохождения ее через пятовую точку арки. Порядок подбора не требует пояснений. Для этой цели могут быть построены графики.

При $\mu = 1$ выражение для x будет

$$x = \frac{y_0 + p - c}{\sqrt{1 - k^2}} \left\{ \frac{2 - k^2}{2} \left[F - F(k, \varphi) \right] - \left[E - E(k, \varphi) \right] \right\} + (p - c) \sin 2\varphi. \quad (13)$$

Если в (11) — (13) полагать величину $c = 0$, то из них получим решение, определяющее форму равновесия тяжелой нити (шарнирной цепи). Если же пренебрегать одновременно величинами c и p, то получим известное уравнение веревочной кривой при гидростатической нагрузке.

Предлагаемое решение можно приближенно использовать и в том случае, если сечение арки назначать в соответствии с требованием равного сопротивления.

В этом случае сечения арки должны назначаться по закону:

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 + \frac{\gamma_1 \mathrm{F}_0}{[\sigma]} (y - y_0), \quad (14)$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение, а за F в (11) — (13) следует принимать $\mathrm{F}_0 = \frac{N_0}{[\sigma_0]}$.

Значение второго слагаемого в (14), как правило, невелико, а потому невелико и его влияние на ось арки.

В арках статически неопределимых, у которых $\frac{f}{l} > \frac{1}{2}$, ось арки можно назначать в соответствии с приведенным решением, так как в них упругое обжатие не будет играть существенной роли и напряжения за счет изгиба от него не будут большими.

Поступило
25 III 1952