Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 1

ГИДРОМЕХАНИКА

Б. В. РУСАНОВ

МЕДЛЕННОЕ НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ОБТЕКАНИЕ ШАРА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 2 II 1953)

Подобно тому, как в предыдущей заметке [1] рассматривалось медленное обтекание цилиндра вязкой жидкостью, можно рассмотреть осесимметричное обтекание шара.

Эта задача в несколько иной постановке решалась ранее Буссинеском [2] и Озином [3]. В настоящей заметке, идя другим путем, мы получим выражения для составляющих скорости и исследуем поведение решения при $t \to \infty$.

Введем систему сферических координат r, ϑ, λ с началом в центре сферы. Угол ϑ отсчитываем от оси симметрии.

В безразмерных величинах уравнения задачи имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \Delta \mathbf{w}, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \tag{1}$$

причем

$$\mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{w}_0(r, \vartheta), \qquad \mathbf{w}|_{r=1} = 0.$$

Будем предполагать начальные значения $v_0(r, \vartheta)$, $u_0(r, \vartheta)$ составляющих скорости $\mathbf{w}$ по осям r, ϑ непрерывно дифференцируемыми функциями, удовлетворяющими уравнению неразрывности, причем

$$v_0(1, \vartheta) = 0, \quad u_0(r, 0) = u_0(r, \pi) = 0.$$

На бесконечности

$$v_0(r, \vartheta) = w_\infty \cos\vartheta + o(1),$$
$$u_0(r, \vartheta) = -w_\infty \sin\vartheta + o(1).$$

Пусть, кроме того, производные $\partial v_0/\partial r$, $\partial u_0/\partial r$ имеют на бесконечности порядок $O(1/r^2)$, а $\partial v_0/\partial\vartheta$, $\partial u_0/\partial\vartheta$ при любом r удовлетворяют условию Липшица по ϑ:

$$\left|\frac{\partial v_0}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta_2} - \left|\frac{\partial v_0}{\partial\vartheta}\right|_{\vartheta_1} \leqslant B\,|\vartheta_2 - \vartheta_1|^\alpha,$$

где $\alpha > 1/2$, а B не зависит от r, ϑ.

Единственность решения доказывается при предположениях:

1) для $t < \infty$ существует предел $w(r, \vartheta, t)$ при $r \to \infty$, равный значению $w_0(r, \vartheta)$ на бесконечности;

2) при $r \to \infty$ $\int\limits_{S_r} \left|\frac{\partial w}{\partial r}\right|^2 dS = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$, где S_r — сфера радиуса r с центром в начале координат.

Начальные значения составляющих скорости представим рядами

$$v_0(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(r) P_n(\cos\vartheta),$$

$$u_0(r, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(r) P_n^1(\cos\vartheta),$$

где $P_n(x)$ — полином Лежандра степени n, а $P_n^1(x)$ — присоединенная лежандрова функция первого порядка степени n:

$$P_n^1(x) = (1 - x^2)^{1/2} \frac{dP_n}{dx}.$$

Условия, налагаемые на $v_0(r, \vartheta)$, $u_0(r, \vartheta)$, дают:

$$\frac{\partial F_n}{\partial r} + \frac{2}{r} F_n + \frac{n(n+1)}{r} G_n = 0, \quad F_n(1) = 0, \quad F_0(r) \equiv 0.$$

Решение ищем в виде:

$$v(r, \vartheta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r, t) P_n(\cos\vartheta);$$

$$u(r, \vartheta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r, t) P_n^1(\cos\vartheta), \qquad (2)$$

и, учитывая уравнение $\Delta p = 0$,

$$p(r, \vartheta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(t)}{r^{n+1}} P_n(\cos\vartheta) + a_{-1}(t).$$

Давление $p(r, \vartheta, t)$ определяется с точностью до слагаемого $a_{-1}(t)$.

Проектируя первое уравнение (1) на оси r, ϑ и подставляя вместо v, u, p их разложения (2), для разности

$$f_{n+1}(r, t) - (n+2) g_{n+1}(r, t) = \varphi_n(r, t) \qquad (3)$$

получим уравнение

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2} \varphi_n \qquad (4)$$

с условиями

$$\varphi_n|_{r=1} = 0, \quad \varphi_n|_{t=0} = F_{n+1}(r) - (n+2) G_{n+1}(r) = \lambda_n(r).$$

Решая задачу для $\varphi_n(r, t)$ с помощью преобразования Лапласа найдем

$$\varphi_n(r, t) = h_n(r, t) - \psi_n(r, t), \qquad (5)$$

где

$$h_n(r, t) = \frac{1}{2t\sqrt{r}} \int_1^{\infty} \lambda_n(\rho) \rho^{3/2} e^{-\frac{\rho^2 + r^2}{4t}} T_{n+1/2}\left(\frac{\rho r}{2t}\right) d\rho, \qquad (6)$$

$$\psi_n(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} \frac{K_{n+1/2}(r\sqrt{s})\, T_{n+1/2}(\sqrt{s}) \int_1^{\infty} \lambda_n(\rho) \rho^{3/2} K_{n+1/2}(\rho\sqrt{s})\, d\rho}{\sqrt{r}\, K_{n+1/2}(\sqrt{s})} ds; \qquad (7)$$

здесь $T_{n+1/2}(z)$, $K_{n+1/2}(z)$ — известные цилиндрические функции.

Подинтегральное выражение в (7) регулярно по всей плоскости s с вырезом по отрицательной части вещественной оси от 0 до $-\infty$ и, если $\frac{\pi}{2}+\varepsilon<|\arg s|<\pi-\varepsilon$, легко оценивается при $|s|\to\infty$.

Функции $\varphi_n(r, t)$ удовлетворяют при $t>0$ уравнениям (4) и предельным условиям, а при $r>1$ — начальным условиям.

Уравнение неразрывности дает

$$\frac{\partial f_n}{\partial r}+\frac{2}{r}f_n+\frac{n(n+1)}{r}g_n=0, \tag{8}$$

откуда следует $f_0(r, t)\equiv 0$, а потому и $a_0(t)\equiv 0$.

Из (3) и (8) получим:

$$\begin{gathered} f_n(r, t)=\frac{n}{r^{n+2}}\int\limits_1^r \varphi_{n-1}(\rho, t)\rho^{n+1}\,d\rho, \\ g_n(r, t)=\frac{n}{(n+1)r^{n+2}}\int\limits_1^r \varphi_{n-1}(\rho, t)\rho^{n+1}\,d\rho-\frac{\varphi_{n-1}(r, t)}{n+1}. \end{gathered} \tag{9}$$

Коэффициенты $a_n(t)$ находятся по формуле

$$a_n(t)=-\frac{n}{n+1}\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial r}\bigg|_{r=1}. \tag{10}$$

Если $t\geqslant\Delta>0$ и $r\leqslant R<\infty$, то все $f_n(r, t)$ и $(n+1)\,g_n(r, t)$ при $n\geqslant R^4/\Delta^2$ удовлетворяют условиям типа:

$$|f_n(r, t)|\leqslant Ce^{-\sqrt{n}}\max|F_n(r)-(n+1)G_n(r)|,$$

где постоянная C не зависит от R, n, Δ.

При дифференцировании по r в оценке добавляется множитель n.

Из всего вышесказанного следует, что функции v, u, p, определяемые формулами (2), (9), (10), (5), (6) (7), дают полное решение задачи, причем построенные решения удовлетворяют указанным выше условиям теоремы единственности.

Используя очевидное соотношение $\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial r^2}+2\frac{\partial\varphi_n}{\partial r}\Big|_{r=1}=0$, найдем, что во все время движения сила, действующая на шар за счет вязкого трения, в два раза больше силы, действующей на шар за счет неравномерности в распределении давления.

При $t\to\infty$ для $v(r, \vartheta, t)$, $u(r, \vartheta, t)$ получим

$$\lim_{t\to\infty} v(r, \vartheta, t)=w_\infty\left(1-\frac{3}{2r}+\frac{1}{2r^3}\right)\cos\vartheta,$$

$$\lim_{t\to\infty} u(r, \vartheta, t)=-w_\infty\left(1-\frac{3}{4r}-\frac{1}{4r^3}\right)\sin\vartheta,$$

т. е. движение жидкости переходит в стационарное стоксовское.

Таким же путем можно решить задачу о прямолинейном движении шара с заданной скоростью без вращения. В этом случае

$$v=f(r, t)\cos\vartheta, \quad u=g(r, t)\sin\vartheta, \quad p=\frac{a(t)}{r^2}\cos\vartheta+a_{-1}(t),$$

где

$$f(r,\ t)=\frac{1}{r^3}\int\limits_1^r \varphi(\rho,\ t)\,\rho^2 d\rho+\frac{W(t)}{r^3},\qquad W(0)=0,$$

$$g(r,\ t)=\frac{1}{2r^3}\int\limits_1^r \varphi(\rho,\ t)\,\rho^2 d\rho+\frac{W(t)}{2r^3}-\frac{\varphi(r,\ t)}{2},$$

$$a(t)=\frac{1}{2}\frac{dW}{dt}-\frac{3}{2}W(t)-\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=1},\qquad \varphi(r,\ t)=\frac{3}{2}\frac{(r-1)}{r\sqrt{\pi}}\int\limits_1^t \frac{e^{-\frac{(r-1)^2}{4(t-\tau)}}W(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}}\,d\tau;$$

здесь $W(t)$ — заданная абсолютная скорость движения шара.

Построенные функции v, u, p удовлетворяют уравнениям (1). В начальный момент жидкость покоится, а при $t>0$ на шаре выполнены условия прилипания, т. е. скорость жидкости при $r=1$ равна скорости шара. На бесконечности скорость жидкости затухает.

Для силы сопротивления Z приходим к известной формуле Буссинеска:

$$Z=\frac{2}{3}\pi a^3\rho\frac{dW}{dt}+6\pi a\mu\left\{W(t)+\frac{a}{\sqrt{\pi\nu}}\int\limits_0^t\frac{W'_\tau(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau\right\};$$

здесь t — обыкновенное (не безразмерное) время, $W(t)$ — заданная скорость шара, a — радиус шара, ρ — плотность жидкости, μ — коэффициент вязкости, $\nu=\mu/\rho$.

Поступило
13 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Русанов, ДАН, 89, № 6 (1953). [2] J. Boussinesq, Théorie analytique de la chaleur, 2, 1901. [3] C. W. Oseen, Ark. för Mat., Astr. och Fys., 14, No. 8 (1919).