Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 1

МАТЕМАТИКА

М. З. СОЛОМЯК

О СОБСТВЕННЫХ ЧИСЛАХ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРАХ ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 2 III 1953)

В работе М. К. Гавурина ([1]) даются оценки для собственных чисел и собственных векторов возмущенного оператора в том случае, когда собственное число невозмущенного оператора простое. Настоящая заметка посвящена обобщению результатов М. К. Гавурина на случай кратного собственного числа. Исходным пунктом является следующее предложение:

Теорема 1. *Пусть A_0 и A — два линейных самосопряженных оператора в гильбертовом пространстве H и пусть λ — какая-либо точка спектра оператора A. Тогда у оператора A_0 найдется такая точка спектра λ_0, что*

$$|\lambda-\lambda_0|\leqslant\|A-A_0\|. \tag{1}$$

Если λ есть точка спектра для A_0, то оценка (1) тривиальна. Полагая поэтому, что λ не принадлежит спектру A_0, будем иметь для любого вектора φ из H:

$$\frac{\|\varphi\|}{\|(A_0-\lambda E)\varphi\|}=\frac{\|R_\lambda(A_0-\lambda E)\varphi\|}{\|(A_0-\lambda E)\varphi\|}\leqslant\|R_\lambda\|=\frac{1}{|\lambda-\lambda_0|},$$

где $R_\lambda=(A_0-\lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора A_0 в точке λ, а λ_0 — ближайшая к λ точка спектра оператора A_0. Из этого неравенства вытекает, что при всяком φ

$$\|(A_0-\lambda E)\varphi\|\geqslant|\lambda-\lambda_0|\cdot\|\varphi\|.$$

Так как λ принадлежит спектру φ, то по любому $\varepsilon>0$ найдется такой отличный от нуля вектор φ, что

$$\|(A-\lambda E)\varphi\|<\varepsilon\|\varphi\|.$$

Для этого φ имеем:

$$\|A-A_0\|\cdot\|\varphi\|\geqslant\|(A-A_0)\varphi\|\geqslant\|(A_0-\lambda E)\varphi\|-\|(A-\lambda E)\varphi\|>$$
$$>|\lambda-\lambda_0|\,\|\varphi\|-\varepsilon\|\varphi\|,\quad \|A-A_0\|>|\lambda-\lambda_0|-\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε для найденного значения λ_0 выполнено неравенство (1). Теорема доказана.

Теорема допускает некоторые обобщения. Например, в случае ограниченности обоих операторов можно предполагать A_0 нормальным, а A — произвольным оператором. Нам, однако, теорема понадобится лишь для того случая, когда A_0 и A — ограниченные самосопряженные операторы.

Из теоремы 1 легко вывести два следствия.

Следствие 1 (о непрерывной зависимости спектра от параметра). *Пусть* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — *последовательность самосопряженных операторов, сходящаяся по норме к самосопряженному оператору* A_0. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots \to \lambda_0$, *где* λ_n — *точка спектра оператора* A_n. *Тогда* λ_0 — *точка спектра оператора* A_0. *Обратно, если* λ_0 — *точка спектра оператора* A_0, *то существует последовательность* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots \to \lambda_0$ *такая, что* λ_n — *точка спектра оператора* A_n.

Следствие 2. *Пусть* λ_0 — *собственное число самосопряженного оператора* A_0, *являющееся изолированной точкой спектра. Тогда для любой точки спектра* λ *оператора* A *выполнено одно из двух неравенств*:

$$|\lambda - \lambda_0| \leqslant \|A - A_0\|; \tag{1a}$$

$$|\lambda - \lambda_0| \geqslant \frac{1-s}{s} \|A - A_0\|. \tag{2}$$

Здесь положено $s = \|R_{\lambda_0}\| \cdot \|A - A_0\|$, где R_{λ_0} — резольвента оператора A_0 в точке λ_0 (определенная на дополнительном подпространстве).

Разумеется, эти оценки имеет смысл применять лишь при $s < {}^1/_2$.

Основной результат заключается в следующей теореме:

Теорема 2. *Пусть* A_0 *и* A — *два линейных ограниченных самосопряженных оператора. Пусть* λ_0 — *n-кратное собственное число оператора* A_0, *являющееся изолированной точкой спектра, и* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — *соответствующая ему ортонормированная система собственных векторов. Если выполнено условие* $s < {}^1/_2$, *то имеют место следующие утверждения*:

1°. *Оператор* A *имеет* n *собственных чисел* $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(n)}$ *(каждое считается столько раз, какова его кратность), удовлетворяющих неравенству*

$$|\lambda^{(i)} - \lambda_0| \leqslant \|A - A_0\| \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

2°. *Соответствующие собственные векторы* $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(n)}$ *не могут быть ортогональны всем* φ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. *Если потребовать, чтобы* $\psi^{(i)}$ — *проекция* $\varphi^{(i)}$ *на линейную оболочку векторов* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — *имела единичную норму, то выполнены оценки*:

$$\|\varphi^{(i)}\|^2 \leqslant \frac{1 - \sqrt{1 - 4s^2}}{2s^2} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4s^2}}, \tag{4}$$

или, что то же самое,

$$\|\varphi^{(i)} - \psi^{(i)}\|^2 \leqslant \frac{1 - \sqrt{1 - 4s^2}}{1 + \sqrt{1 - 4s^2}}. \tag{5}$$

3°. *Если* λ^* — *точка спектра оператора* A, *отличная от* $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(n)}$, *то имеет место неравенство*

$$|\lambda^* - \lambda_0| \geqslant \frac{1-s}{s} \|A - A_0\|. \tag{6}$$

Для доказательства рассматриваем оператор, зависящий от параметра:

$$A(t) = A_0 + (A - A_0)\, t,$$

значением которого при $t = 1$ является оператор A. К оператору $A(t)$ приложима теорема, доказанная Реллихом (2), в силу которой в некоторой окрестности точки $t = 0$ существуют собственные числа $\lambda^{(i)}(t)$

общей кратности n, являющиеся регулярными функциями от t и такие, что $\lambda^{(i)}(0) = \lambda_0$. Существует также такое $\rho > 0$, что в промежутке $(\lambda_0 - \rho, \lambda_0 + \rho)$ нет точек спектра оператора $A(t)$, отличных от всех $\lambda^{(i)}(t)$.

Для операторов $A(t)$ из этой окрестности точки $t = 0$ оценки теоремы 2 выполняются: (3) и (6) вытекают из (1a) и (2), а (4) и (5) доказываются так же, как соответствующие неравенства для случая простого собственного числа. Основная трудность доказательства заключается в том, чтобы распространить эти оценки на весь промежуток $s < {}^1/_2$.

Это распространение осуществляется следующим образом.

Пусть t_0 — такое значение параметра, что при $t \in [0, t_0]$ $s = s(t) = \| R_{\lambda_0} \| \| A(t) - A_0 \| < {}^1/_2$. Докажем, что для оператора $A(t_0)$ выполняется заключение теоремы 2. Пусть это не так. Полагая для определенности $t_0 > 0$, возьмем точку $\bar{t}$ — точную нижнюю границу тех t, для которых заключение теоремы неверно.

Рассмотрим какую-либо ветвь $\lambda^{(i)}(t)$. Так как

$$| \lambda^{(i)}(t_2) - \lambda^{(i)}(t_1) | \leqslant \| A(t_2) - A(t_1) \| = \| A - A_0 \| \cdot | t_2 - t_1 |,$$

то существует $\lim\limits_{t \nearrow \bar{t}} \lambda^{(i)}(t)$. Согласно следствию 1, этот предел, который уместно обозначить через $\lambda^{(i)}(\bar{t})$, есть точка спектра оператора $A(\bar{t})$. Очевидно, что выполнена оценка $| \lambda(\bar{t}) - \lambda_0 | \leqslant \| A(\bar{t}) - A_0 \|$. Если λ^* — точка спектра оператора $A(\bar{t})$, отличная от $\lambda^{(i)}(\bar{t})$ при всех i, то для нее выполнена оценка $| \lambda^* - \lambda_0 | \geqslant \dfrac{1 - s(\bar{t})}{s(\bar{t})} \| A(\bar{t}) - A_0 \|$. Это легко вывести из следствий 1 и 2.

Таким образом, $\lambda^{(i)}(\bar{t})$ — изолированные точки спектра оператора $A(\bar{t})$; легко доказать, что кратность каждого $\lambda^{(i)}(\bar{t})$ конечна.

Это означает, что для оператора $A(t)$ в некоторой окрестности точки $\bar{t}$ выполнены условия теоремы 2, если вместо λ_0 брать любое $\lambda^{(i)}(\bar{t})$. Отсюда, прежде всего, вытекает, что суммарная кратность всех $\lambda^{(i)}(\bar{t})$ равна n (иначе она была бы не равна n и левее $\bar{t}$). Далее, при всяком $t > \bar{t}$ из этой окрестности оператор $A(t)$ имеет собственные числа $\lambda^{(i)}(t)$ общей кратности n. Для них выполнены оценки:

$$| \lambda^{(i)}(t) - \lambda_0 | \leqslant | \lambda^{(i)}(t) - \lambda^{(i)}(\bar{t}) | + | \lambda^{(i)}(\bar{t}) - \lambda_0 | \leqslant$$

$$\leqslant \| A - A_0 \| [(t - \bar{t}) + \bar{t}] = \| A - A_0 \| t = \| A(t) - A_0 \|.$$

Тем самым показано, что для всех собственных чисел $\lambda^{(i)}(t)$ оператора $A(t)$ выполнена оценка (3). На проверке неравенств (4) и (5) мы не останавливаемся. Если λ^* — точка спектра оператора $A(t)$, отличная от всех $\lambda^{(i)}(t)$, то $| \lambda^* - \lambda^{(i)}(\bar{t}) | > \| A(t) - A(\bar{t}) \|$ при всех i. Но по теореме 1 найдется такая точка спектра λ' оператора $A(\bar{t})$, что $| \lambda^* - \lambda' | \leqslant \| A(t) - A(\bar{t}) \|$. Для λ' выполнено неравенство (6). Отсюда легко получается, что

$$| \lambda^* - \lambda_0 | \geqslant \frac{1 - s(t)}{s(t)} \| A(t) - A_0 \|.$$

Вопреки предположению, мы получили, что теорема 2 верна для всех t из некоторой окрестности точки $t = \bar{t}$. Это противоречие и доказывает теорему.

В случае простого собственного числа нетрудно выписать ряды, позволяющие не только дать оценки для собственных чисел и собственных векторов возмущенного оператора, но и вычислять их значения (1). В случае кратного собственного числа подобные формулы весьма громоздки и, кроме того, сходимость получающихся рядов не гарантирована.

Поступило
2 III 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. К. Гаврин, ДАН, 76, № 6 (1951). [2] F. Rellich, Math. Ann., 113, H. 4 (1936).