

МАТЕМАТИКА

Действительный член АН Узб.ССР Т. А. САРЫМСАКОВ

ОБ ЭРГОДИЧЕСКОМ ПРИНЦИПЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ
МАРКОВА

Рассмотрим простую, неоднородную и дискретную цепь Маркова с единственно возможными и несовместимыми состояниями

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s.$$

Как известно, цепь Маркова в рассматриваемом случае вполне определяется заданием последовательности стохастических матриц *

$$A_k = \| p_{ij}(k) \|_1^s \quad (k = 1, 2, \dots; i, j = 1, 2, \dots, s), \quad (1)$$

где $p_{ij}(k)$ — условная вероятность, пребывая в состоянии ω_i в момент времени t_k , перейти в состояние ω_j к моменту времени t_{k+1} , т. е. за один шаг.

Обозначим через $\mathfrak{G}^{(s)}$ совокупность всех стохастических матриц порядка s , а через $\mathfrak{G}_1^{(s)}$ — совокупность всех примитивных стохастических матриц порядка s .

Нетрудно показать, что множество $\mathfrak{G}_1^{(s)}$ не является замкнутым по отношению к операции умножения матриц, входящих в $\mathfrak{G}_1^{(s)}$, т. е. что произведение любых двух примитивных матриц из $\mathfrak{G}_1^{(s)}$ может и не быть примитивной матрицей.

Это утверждение можно продемонстрировать на следующем примере. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix},$$

где α, β, γ и $\delta > 0$. Легко проверить, что стохастические матрицы A и B являются примитивными. Однако произведение их не является примитивным, ибо

$$AB = \begin{pmatrix} \beta\gamma & \alpha & \beta\delta \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что можно построить в качестве подобных примеров и матрицы любого порядка $s (> 2)$ таких, что каждая из них будет примитивной, но произведение их не будет обладать этим свойством.

Поэтому из совокупности матриц $\mathfrak{G}_1^{(s)}$ выделим подмножество $\mathfrak{G}_2^{(s)}$, пользуясь следующим правилом.

* Укажем литературные источники основных употребляемых нами ниже понятий: стохастическая матрица ⁽¹⁾, стр. 148; примитивная и импримитивная матрицы ⁽¹⁾, стр. 160; разложимая и неразложимая матрицы ⁽¹⁾, стр. 153; эргодический принцип ⁽²⁾.

Матрицу A отнесем к классу $\mathfrak{G}_2^{(s)}$, если произведение матрицы A на любую матрицу из $\mathfrak{G}_1^{(s)}$ дает примитивную матрицу; в противном случае, т. е. если в классе $\mathfrak{G}_1^{(s)}$ найдется хотя бы одна матрица B такая, что произведение AB импримитивно, то матрица A не входит в класс $\mathfrak{G}_2^{(s)}$.

Очевидно, что класс $\mathfrak{G}_2^{(s)}$ не является пустым, ибо в него войдут положительные матрицы и все матрицы, у которых хотя бы один столбец сплошь состоит из положительных элементов; матрицы, обладающие последним свойством, будем называть в дальнейшем марковскими. Совокупность всех марковских стохастических матриц обозначим через $\mathfrak{M}^{(s)}$. Очевидно, что любая матрица из $\mathfrak{M}^{(s)}$ является примитивной.

То, что имеются матрицы, принадлежащие классу $\mathfrak{G}_2^{(s)}$, но не принадлежащие $\mathfrak{M}^{(s)}$, вытекает из следующего предложения, принадлежащего Х. Мустафину.

Если у примитивной матрицы A все элементы главной диагонали положительны, то она принадлежит классу $\mathfrak{G}_2^{(s)}$.

Далее, естественно, возникает вопрос: будет ли класс $\mathfrak{G}_2^{(s)}$ замкнутым, т. е. если матрицы A и $B \in \mathfrak{G}_2^{(s)}$, то будет ли $AB \in \mathfrak{G}_2^{(s)}$.

Из определения класса $\mathfrak{G}_2^{(s)}$ ясно, что имеет место:

Теорема 1. Если матрицы A и B принадлежат классу $\mathfrak{G}_2^{(s)}$, то их произведение AB также принадлежит классу $\mathfrak{G}_2^{(s)}$.

Представляет теперь интерес решить следующий вопрос. Пусть A , B и C — примитивные матрицы такие, что их попарные произведения также примитивны. Будет ли тогда произведение ABC примитивной матрицей? Следующий пример показывает, что этот вопрос не всегда имеет положительный ответ.

Рассмотрим матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & 0 & \beta_1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & \beta_3 \\ 0 & \alpha_4 & \beta_4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$ и $\alpha_i + \beta_i = 1$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Составим произведения

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_2 \beta_1 & \alpha_1 + \beta_1 \beta_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 A_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_4 & \beta_4 \\ 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 \alpha_3 & \alpha_1 \beta_3 \end{pmatrix},$$

$$A_2 A_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_4 & \beta_4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_4 \beta_2 & \alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \beta_4 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что A_1 , A_2 , A_3 и $A_1 A_2$, $A_1 A_3$ и $A_2 A_3$ — примитивные матрицы; однако произведение

$$A_1 A_2 A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_4 \beta_2 & \alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \beta_4 \\ 0 & \alpha_2 \alpha_3 \beta_1 + (\alpha_1 + \beta_1 \beta_2) \alpha_4 & \alpha_2 \beta_1 \beta_3 + (\alpha_1 + \beta_1 \beta_2) \beta_4 \end{pmatrix},$$

очевидно, порождает импримитивную матрицу. В то же время легко видеть, что произведение

$$A_2 A_1 A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 \alpha_3 & \alpha_1 \beta_3 \\ \beta_2 & \alpha_2 \alpha_4 & \alpha_2 \beta_4 \end{pmatrix}$$

дает примитивную матрицу, тогда как для двух матриц A и B известно, что произведения AB и BA одновременно примитивны или одновременно импримитивны.

Затем непосредственным умножением легко доказывается справедливость следующего предложения.

Лемма 1. Если $A \in \mathfrak{M}^{(s)}$ и B — любая стохастическая матрица, то $AB \in \mathfrak{M}^{(s)}$ и $BA \in \mathfrak{M}^{(s)}$.

Определение 1. Две матрицы $A \in \mathfrak{G}^{(s)}$ и $B \in \mathfrak{G}^{(s)}$ будем называть однотипными, если они имеют одинаковую схему расположения нулей (следовательно, и не нулей).

В дальнейшем все марковские матрицы объединим, как и прежде, в один класс $\mathfrak{M}^{(s)}$ безотносительно к тому, каким типом обладает та или иная матрица, принадлежащая классу $\mathfrak{M}^{(s)}$, ибо в разбиении марковских матриц по типам нет необходимости. Всем марковским матрицам порядка s условно припишем тип α_0 .

Очевидно, что множество $\mathfrak{G}^{(s)}$ и, следовательно, $\mathfrak{G}_2^{(s)}$ можно разбить на конечное число непересекающихся классов, объединив в один класс все однотипные матрицы. Различное число классов однотипных матриц, на которые разбивается множество $\mathfrak{G}^{(s)}$, обозначим через μ , а сами классы однотипных матриц обозначим через $\mathfrak{A}_i^{(s)}$ ($i = 1, 2, \dots, \mu$).

Представителя класса $\mathfrak{A}_i^{(s)}$ обозначим через K_i . Следовательно, все матрицы класса $\mathfrak{A}_i^{(s)}$ однотипны с матрицей K_i . Тип матрицы K_i обозначим через α_i .

Определение 2. Будем говорить, что матрица K_i обладает инвариантным типом, если тип матрицы K_i^2 также равен α_i .

Очевидно, что в этом случае при любом целом и⁺ положительном r тип матрицы K_i^r будет также равен α_i . В силу леммы 1 тип α_0 , очевидно, будет инвариантным типом.

Разобьем совокупность $\mathfrak{G}_2^{(s)}$ на классы однотипных матриц:

$$\mathfrak{M}^{(s)}, \mathfrak{A}_{\alpha_1}^{(s)}, \mathfrak{A}_{\alpha_2}^{(s)}, \dots, \mathfrak{A}_{\alpha_\nu}^{(s)} \quad (\nu < \mu). \quad (2)$$

Легко доказать, что среди матриц, принадлежащих $\mathfrak{G}_2^{(s)}$, только матрицы, принадлежащие классу $\mathfrak{M}^{(s)}$, могут обладать инвариантным типом. В самом деле, если взять любую матрицу K_{α_i} из класса $\mathfrak{A}_{\alpha_i}^{(s)}$, отличного от класса $\mathfrak{M}^{(s)}$, то в каждом столбце матрицы K_{α_i} будет хотя бы один элемент, равный нулю.

Но матрица K_{α_i} — примитивная матрица, и поэтому можно указать целое число r (> 0) такое, что матрица $K_{\alpha_i}^r$ будет иметь хотя бы один столбец, все элементы которого будут положительны, и, следовательно, тип матрицы K_{α_i} не может быть инвариантным.

Имеют место следующие предложения.

Лемма 2. Пусть A и B — любые две матрицы из класса $\mathfrak{G}_2^{(s)}$, но не принадлежащие $\mathfrak{M}^{(s)}$. Тогда тип произведения AB отличен от типа матриц A и B .

Лемма 3. Пусть A_1, A_2, \dots, A_k — матрицы, принадлежащие $\mathfrak{G}_2^{(s)}$. Тогда произведение $A_1 A_2 \dots A_k$ всегда принадлежит к марковскому классу $\mathfrak{M}^{(s)}$, как только $k \geq \nu$, где ν — число немарковских типов матриц из $\mathfrak{G}_2^{(s)}$.

Введем еще следующие обозначения: $p_{ij}^+(k) = p_{ij}^+(k)$ для тех i и j , для которых $p_{ij}(k) > 0$; $p_{ij}^0(k) = p_{ij}^0(k)$ для тех i и j , для которых $p_{ij} = 0$.

Теорема 2. Если все матрицы последовательности (1) принадлежат классу $\mathfrak{G}_2^{(s)}$ и

$$\min_{1 \leq i, j \leq s} p_{ij}^+(k) \geq \lambda > 0 \quad (3)$$

равномерно относительно k , то цепь Маркова, управляемая последовательностью стохастических матриц (1), подчиняется эргодическому принципу.

Эта теорема является следствием теоремы Маркова (3) и леммы 3.

Замечание. Теорему 2 можно обобщить в следующем направлении. Каждый тип матриц A характеризуется множеством

$$M = M(A)$$

тех пар индексов (i, j) , для которых $p_{i,j} > 0$. Будем говорить, что само множество M принадлежит классу $H_2^{(s)}$, если матрица с $M(A) = M$ принадлежит классу $\mathfrak{G}_2^{(s)}$. Тогда:

Если существует последовательность M_k множеств класса $H_2^{(s)}$, для которой

$$\min_{(i,j) \in M_k} p_{ij}(k) > \lambda, \quad (4)$$

то эргодический принцип выполнен.

Далее заметим, что если цепь Маркова, управляемая последовательностью стохастических матриц s порядка

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$$

подчиняется эргодическому принципу, то из последовательности (1) можно сконструировать последовательность марковских стохастических матриц

$$B_{n_1}, B_{n_2(n_1)}, \dots, B_{n_k(n_{k-1})}, \dots, \quad (5)$$

где

$$B_{n_1} = A_1 A_2 \dots A_{n_1} \in \mathfrak{M}^{(s)},$$

$$B_{n_k(n_{k-1})} = A_{n_{k-1}+1} A_{n_{k-1}+2} \dots A_{n_k} \in \mathfrak{M}^{(s)} \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Как следствие из доказанных выше предложений вытекает

Теорема 3. Если дана произвольная последовательность стохастических матриц s -го порядка, управляющая цепью Маркова, и если

$$\min_{1 \leq i, j \leq s} p_{ij}^+(k) \geq \lambda > 0$$

равномерно относительно k , то условие необходимое и достаточное для того, чтобы имел место эргодический принцип, состоит в том, чтобы из данной последовательности стохастических матриц можно было сконструировать подобно (5) последовательность марковских стохастических матриц.

Наконец, заметим, что в простейшем случае $s = 2$ имеем $\mathfrak{G}_1^{(2)} = \mathfrak{G}_2^{(2)} = \mathfrak{M}^{(2)}$.

Среднеазиатский
государственный университет

Поступило
22 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. И. Романовский, Acta Math., 66, 174 (1935). ² А. Н. Колмогоров, Усп. матем. наук, № 5 (1938). ³ С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, 4-е изд., 1948.