Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 1

МАТЕМАТИКА

М. Н. МАРУШИН

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОБОБЩЕННОЙ ОСНОВНОЙ ЛЕММЫ С. Н. БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ СУММ ПОЧТИ НЕЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИНДБЕРГА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 7 III 1953)

В работе [1] С. Н. Бернштейн доказал следующую лемму о приложимости предельной теоремы к сумме S_n произвольно связанных величин x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, которые он назвал почти независимыми.

Основная лемма. *Пусть*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \text{м. о. } x_i = 0, \quad \text{м. о. } x_i^2 = b_i, \quad \text{м. о. } S_n^2 = B_n, \quad B_n' = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Если при произвольно заданных $x_1, \ldots, x_{i-1}$ $\underset{x_1 \ldots x_{i-1}}{\text{м. о.}}\ x_i = a_i$, $\underset{x_1 \ldots x_{i-1}}{\text{м. о.}}\ (x_i - a_i)^2 = b_i^*$ *и* C_i *представляет максимум условного математического ожидания* $|x_i|^3$, *причем*

$$\frac{\text{м. о.} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \right)^2}{B_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \tag{1}$$

$$\frac{\text{м. о.} \sum\limits_{i=1}^{n} |b_i - b_i^*|}{B_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \tag{2}$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} C_i}{B_n^{3/2}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \tag{3}$$

то

$$\text{вер} \left(\frac{S_n}{\sqrt{B_n}} < z \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} \, dt. \tag{4}$$

В настоящей работе мы покажем, что аналогичная лемма справедлива при обычном условии Линдберга, заменяющем условие (3). На возможность такой замены С. Н. Бернштейном указано в работе [1] (стр. 138—140). Для краткости письма положим

$$r'_{nk}(\tau) = \frac{1}{B'_n} \int\limits_{|x| > \tau \sqrt{B'_n}} x^2 \, dF'_k(x), \quad r_{nk}(\tau) = \frac{1}{B'_n} \int\limits_{|x| > \tau \sqrt{B'_n}} x^2 \, dF_k(x),$$

где $F'_k(x)$ — интегральный закон распределения вероятностей величины x_k, если известны значения случайных величин $x_1, \ldots, x_{k-1}$, а $F_k(x)$ —

априорный закон x_k, τ — произвольное положительное сколь угодно малое число. Принимая во внимание указанные обозначения, теорему можно сформулировать следующим образом:

При выполнении условий (1), (2) *и при соблюдении условия*

$$\sum_{k=1}^{n} r_{nk}(\tau) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{3*}$$

справедливо предельное соотношение (4).

Доказательство. 1. Как показал С. Н. Бернштейн в ([1]), при соблюдении условий (1), (2) справедливо соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{B_n'}{B_n} = 1$.

2. Для доказательства теоремы покажем, что характеристическая функция суммы $(S_n - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i)/\sqrt{B_n'}$ при $n \to \infty$ стремится $e^{-t^2/2}$, т. е. к характеристической функции закона Гаусса $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$. Положим $\frac{x_k - a_k}{\sqrt{B_n'}} = y_k$ и вычислим сначала характеристическую функцию k-го слагаемого y_k в предположении, что $y_1, \ldots, y_{k-1}$ приняли произвольные значения. Это обстоятельство отметим штрихом:

$$f_k'\left(\frac{t}{\sqrt{B_n'}}\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it\frac{x-a_k}{\sqrt{B_n'}}}\, dF_k'(x).$$

Обозначим $\hat{a}_k = \int\limits_{|x|>\tau\sqrt{B_n'}} x\, dF_k'(x)$, $\check{a}_k = \int\limits_{|x|\leqslant\tau\sqrt{B_n'}} x\, dF_k'(x)$. Тогда

$$f_k'\left(\frac{t}{\sqrt{B_n'}}\right) = 1 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{it\frac{x-\check{a}_k}{\sqrt{B_n'}}} - 1\right) dF_k'(x) +$$

$$+ \left(e^{-it\frac{\hat{a}_k}{\sqrt{B_n'}}} - 1\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it\frac{x-\check{a}_k}{\sqrt{B_n'}}}\, dF_k'(x) = 1 + \int\limits_{|x|\leqslant\tau\sqrt{B_n'}} \left(e^{it\frac{x-\check{a}_k}{\sqrt{B_n'}}} - 1\right) dF_k'(x) +$$

$$+ \int\limits_{|x|>\tau\sqrt{B_n'}} \left(e^{it\frac{x-\check{a}_k}{\sqrt{B_n'}}} - 1\right) dF_k'(x) + \left(e^{-it\frac{\hat{a}_k}{\sqrt{B_n'}}} - 1\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it\frac{x-\check{a}_k}{\sqrt{B_n'}}}\, dF_k'(x).$$

Оценим каждое слагаемое правой части:

$$\left| \int\limits_{|x|>\tau\sqrt{B_n'}} \left(e^{it\frac{x-\check{a}_k}{\sqrt{B_n'}}} - 1\right) dF_k'(x) \right| \leqslant 2 \int\limits_{|x|>\tau\sqrt{B_n'}} dF_k'(x) \leqslant \frac{2}{\tau^2} r_{nk}'(\tau).$$

Легко показать, что

$$e^{-it\frac{\hat{a}_k}{\sqrt{B_n'}}} = 1 + \frac{t \int\limits_{|x|>\tau\sqrt{B_n'}} x\, dF_k'(x)}{\sqrt{B_n'}}\,\theta_1, \text{ где } |\theta_1| \leqslant 2.$$

Пользуясь этим разложением, можно получить оценку

$$\left| \left(e^{-it\frac{\hat{a}_k}{\sqrt{B_n'}}} - 1\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it\frac{x-\check{a}_k}{\sqrt{B_n'}}}\, dF_k'(x) \right| \leqslant \left| \frac{t\,\hat{a}_k}{\sqrt{B_n'}}\,\theta_1 \right| \leqslant \frac{2|t|}{\tau} r_{nk}'(\tau).$$

По формуле Тейлора

$$\int\limits_{|x|\leqslant\tau\sqrt{B_n'}}\left(e^{it\frac{x-\check{a}_k}{\sqrt{B_n'}}}-1\right)dF_k'(x)=\frac{it}{\sqrt{B_n'}}\int\limits_{|x|\leqslant\tau\sqrt{B_n'}}(x-\check{a}_k)\,dF_k'(x)-$$

$$-\frac{t^2}{2B_n'}\int\limits_{|x|\leqslant\tau\sqrt{B_n'}}(x-\check{a}_k)^2\,dF_k'(x)+\theta_2\frac{t^3}{B_n'^{3/2}}\int\limits_{|x|\leqslant\tau\sqrt{B_n'}}(x-\check{a}_k)^3\,dF_k'(x),$$

где $|\theta_2|\leqslant 1/3$;

$$\left|\frac{it}{\sqrt{B_n'}}\int\limits_{|x|\leqslant\tau\sqrt{B_n'}}(x-\check{a}_k)\,dF_k'(x)\right|\leqslant|t|\,\tau\int\limits_{|x|>\tau\sqrt{B_n'}}dF_k'(x)\leqslant\frac{|t|}{\tau}r_{nk}'(\tau).$$

Покажем, что

$$\frac{1}{B_n'}\int\limits_{|x|\leqslant\tau\sqrt{B_n'}}(x-\check{a}_k)^2\,dF_k'(x)=\frac{b_k}{B_n'}+\delta_k, \tag{5}$$

где

$$|\delta_k|\leqslant\frac{|b_k^*-b_k|}{B_n'}+8r_{nk}'(\tau)+\frac{a_k^2}{B_n'}.$$

В самом деле,

$$\frac{1}{B_n'}\int\limits_{|x|\leqslant\tau\sqrt{B_n'}}(x-\check{a}_k)^2\,dF_k'(x)=$$

$$=\frac{1}{B_n'}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-a_k)^2\,dF_k'(x)-r_{nk}'(\tau)+\frac{\hat{a}_k^2}{B_n'}\Bigg(2+3\int\limits_{|x|\leqslant\tau\sqrt{B_n'}}dF_k'(x)\Bigg)+$$

$$+\frac{2\hat{a}_k\check{a}_k}{B_n'}\int\limits_{|x|\leqslant\tau\sqrt{B_n'}}dF_k'(x)-\frac{a_k^2}{B_n'}\int\limits_{|x|>\tau\sqrt{B_n'}}dF_k'(x)=\frac{b_k}{B_n'}+\delta_k,$$

где
$$\delta_k=\frac{b_k^*-b_k}{B_n'}+\frac{\hat{a}_k^2}{B_n'}\Bigg(2+3\int\limits_{|x|\leqslant\tau\sqrt{B_n'}}dF_k'(x)\Bigg)+$$

$$+\frac{2\hat{a}_k\check{a}_k}{B_n'}\int\limits_{|x|\leqslant\tau\sqrt{B_n'}}dF_k'(x)-r_{nk}'(\tau)-\frac{a_k^2}{B_n'}\int\limits_{|x|>\tau\sqrt{B_n'}}dF_k'(x).$$

Отсюда легко получается неравенство (5)

$$\left|\frac{\theta_2 t^3}{B_n'^{3/2}}\int\limits_{|x|\leqslant\tau\sqrt{B_n'}}(x-\check{a}_k)^3\,dF_k'(x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{3}|t|^3\tau\frac{1}{B_n'}\int\limits_{|x|\leqslant\tau\sqrt{B_n'}}(x-\check{a}_k)^2\,dF_k'(x)\leqslant\frac{2}{3}|t|^3\tau\left(\frac{b_k}{B_n'}+|\delta_k|\right).$$

Таким образом,

$$f_k'\left(\frac{t}{\sqrt{B_n'}}\right)=1-\frac{t^2}{2}\frac{b_k}{B_n'}+\beta_k,$$

где
$$|\beta_k|\leqslant r_{nk}'(\tau)\left(\frac{3|t|}{\tau}+\frac{2}{\tau^2}+4t^2+\frac{16}{3}|t|^3\tau\right)+$$

$$+\frac{|b_k^*-b_k|}{B_n'}\left(\frac{t^2}{2}+\frac{2}{3}|t|^3\tau\right)+\frac{a_k^2}{B_n'}\left(\frac{t^2}{2}+\frac{2}{3}|t|^3\tau\right)+\frac{2}{3}|t|^3\tau\frac{b_k}{B_n'}.$$

3. Вычислим последовательно характеристическую функцию

$$G_m(t) = \text{м. о. } e^{it\sum\limits_{k=1}^{m} y_k} \quad (m \leqslant n),$$

полагая $|t| < N$, где $N > 0$ — произвольное число. Легко показать, что

$$G_m(t) = G_{m-1}(t)\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{b_m}{B_n'}\right) + \gamma_m, \quad \text{где } |\gamma_m| \leqslant \text{м. о. } |\beta_m|.$$

Обозначая $E_m(t) = \prod\limits_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{b_k}{B_n'}\right)$, получим, что

$$G_n(t) = E_n(t) + E_n(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k}{E_k}, \qquad |G_n - E_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|,$$

где

$$|\gamma_k| \leqslant r_{nk}(\tau)\left(\frac{3|t|}{\tau} + \frac{2}{t^2} + 4t^2 + \frac{16}{3}|t|^3\tau\right) + \\ + \frac{\text{м. о. } |b_k^* - b_k|}{B_n'}\left(t^2 + \frac{4}{3}|t|^3\tau\right) + \frac{2}{3}|t|^3\tau\frac{b_k}{B_n'}.$$

Благодаря условиям (2), (3*) $G_n(t) \to e^{-t^2/2}$ при $n \to \infty$ в любом промежутке $-N < t < N$. Этим самым мы доказали, что вероятность неравенства $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i < z$ имеет пределом $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}\,dt$ при $n \to \infty$. Благодаря соотношению $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{B_n'}{B_n} = 1$ к тому же пределу стремится вероятность неравенства $S_n - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i < z\sqrt{B_n}$ при $n \to \infty$.

4. Наконец, применяя неравенство Чебышева, легко доказать, что $\left(S_n - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\Big/\sqrt{B_n}$ и $S_n\Big/\sqrt{B_n}$ имеют один и тот же предельный закон распределения вероятностей, так как

$$\text{вер}\left\{\frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right|}{\sqrt{B_n}} < \varepsilon\right\} \to 1,$$

когда $n \to \infty$ для любого сколь угодно малого положительного числа ε, т. е. и для $S_n \big/ \sqrt{B_n}$ верно соотношение (4), ч. т. д.

Замечание 1. Доказанная теорема обобщает результат, полученный О. В. Сармановым в статье [2].

Замечание 2. Если заменить условие (1) менее ограничительным

$$\frac{\text{м. о. } \left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right|^{\delta}}{B_n^{\delta/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (\text{где } \delta > 0),$$

указанным в сноске на стр. 140 работы С. Н. Бернштейна [1], то к сумме S_n будет применима несобственная предельная теорема $\left(\text{в этом случае } \lim\frac{B_n'}{B_n} \text{ может быть не равен } 1\right)$.

Поступило
8 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, № 2 (1940). [2] О. В. Сарманов, там же, 11, 569 (1947).