Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 1

МАТЕМАТИКА

Б. М. ЛЕВИТАН

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ УРАВНЕНИЯ $y'' + \{\lambda - q(x)\}y = 0$

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 3 III 1953)

1. Рассмотрим уравнение

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}y = 0, \tag{1}$$

заданное в интервале $(-\infty, \infty)$. Относительно функции $q(x)$ будем предполагать, что она действительна и суммируема в каждом конечном интервале. Обозначим через $\varphi(x, \lambda)$, $\psi(x, \lambda)$ решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'_x(0, \lambda) = 0$, соответственно: $\psi(0, \lambda) = 0$, $\psi'_x(0, \lambda) = 1$.

Как известно [1], существуют монотонные функции $\xi(\lambda)$, $\zeta(\lambda)$ и функция с ограниченной вариацией в каждом конечном интервале $\eta(\lambda)$ такие, что для каждой функции $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty} f^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)\,d\xi(\lambda) + 2\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\,G(\lambda)\,d\eta(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda)\,d\zeta(\lambda),$$

где

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x, \lambda)\,dx, \quad G(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\psi(x, \lambda)\,dx.$$

Будем называть спектральной функцией уравнения (1) следующую функцию от трех переменных:

$$\theta(x, y, \lambda) = \begin{cases} \int_0^{\lambda} \{\varphi(x, \lambda)\,\varphi(y, \lambda)\,d\xi(\lambda) + [\varphi(x, \lambda)\,\psi(y, \lambda) + \varphi(y, \lambda)\,\psi(x, \lambda)]\,d\eta(\lambda) + \\ \qquad + \psi(x, \lambda)\,\psi(y, \lambda)\,d\zeta(\lambda)\}, & \text{если } \lambda > 0; \\ -\theta(x, y; \lambda), & \text{если } \lambda < 0; \\ 0 & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$$

Лемма. *При произвольных x, y и $t > 0$*

$$\int_{-\infty}^{0} e^{t\sqrt{|\lambda|}}\,|d_\lambda \theta(x, y; \lambda)| < \infty.$$

2. Для $\lambda > 0$ положим $\lambda = \mu^2$, $\theta(x, y; \lambda) = \theta_1(x, y; \mu)$. Если $q(x) = 0$, то

$$\theta_1(x, y; \mu) = \theta_1^*(x, y; \mu) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin \mu (x - y)}{x - y}.$$

Теорема 1. *Предположим, что коэффициент $q(x)$ в уравнении (1) суммируем в каждом конечном интервале. При $\mu \to \infty$ справедливо следующее асимптотическое равенство:*

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu}{\mu}\right) d_\nu \theta_1(x, y; \nu) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2 \frac{\mu}{2}(x-y)}{\mu (x-y)^2} + O(1). \tag{2}$$

В формуле (2) О-член оценивается равномерно в каждой конечной области.

Теорема 2. *Предположим, что коэффициент $q(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *Для каждого конечного интервала (x_0, x_1) можно указать числа $C = C(x_0, x_1)$ и $\alpha = \alpha(x_0, x_1)$ так, что если $x \in (x_0, x_1)$, то при $0 < t \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\int_{x-t}^{x+t} |q(s)|\, ds < Ct^{\alpha}.$$

2) *Уравнение (1) не имеет отрицательного спектра.*

При выполнении этих условий справедлива следующая асимптотическая формула ($\mu \to \infty$):

$$\theta_1(x, y; \mu) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \mu (x-y)}{x-y} + O(1). \tag{3}$$

Теоремы 1 и 2 доказываются с помощью аппроксимационных теорем, изложенных в нашей работе ([2]).

Аналогичные теоремы имеют место для интервала $(0, \infty)$, а также для конечного интервала (a, b), если соответствующим образом определить спектральную функцию. В последнем случае коэффициент $q(x)$ в окрестности точек a и b может и не быть суммируемой функцией, а точки x и y в формулах (2) и (3) должны находиться внутри интервала $(a; b)$.

3. Пусть $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$. Положим

$$S(x, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \theta_1(x, t; \mu)\, dt;$$

$$S^*(x, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \theta_1^*(x, t; \mu)\, dt;$$

$$R(x, \mu) = S(x, \mu) - S^*(x, \mu).$$

Теорема 3. *Предположим, что коэффициент $q(x)$ в уравнении (1) есть суммируемая функция в каждом конечном интервале. Пусть $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$. Обозначим через (x_0, x_1) произвольный конечный интервал действительной оси. Можно указать константу $C = C(x_0, x_1)$ так, что если $x \in (x_0, x_1)$, то при $\mu \to \infty$ справедлива оценка*

$$\left| \frac{1}{\mu} \int_0^{\mu} R(x, \nu)\, d\nu \right| \leqslant C \|f\|, \tag{4}$$

где

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, dx \right)^{1/2}.$$

Теорема 4. *Предположим, что коэффициент $q(x)$ удовлетворяет условиям 1) и 2), сформулированным в теореме 2.*

Пусть $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$. *Существует константа* $C = C(x_0, x_1)$ *так, что если* $x \in (x_0, x_1)$, *то при* $\mu \to \infty$

$$|R(x, \mu)| \leqslant C \|f\|. \tag{5}$$

Из теорем 1 и 3 можно получить следующую теорему разложения:

Теорема 5. *Предположим, что коэффициент* $q(x)$ *суммируем в каждом конечном интервале. Пусть* $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$.

Положим

$$r(x, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\{\theta(x, t; \nu) - \theta(x, t; -\nu) - \theta^*(x, t; \nu)\}\, dt.$$

Тогда равномерно в каждом конечном интервале

$$\lim_{\mu \to \infty} \frac{1}{\mu} \int_0^{\mu} r(x, \nu)\, d\nu = 0,$$

т. е. разность между средними арифметическими первого порядка обобщенного интеграла Фурье и обычного интеграла Фурье стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.

Аналогичная теорема другим методом была доказана Титчмаршем [3], который, однако, предполагал, что спектр дискретен и снизу ограничен.

Из теорем 2 и 4 следует

Теорема 6. *Пусть коэффициент* $q(x)$ *удовлетворяет условиям 1) и 2), сформулированным в теореме 2. Пусть* $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$. *Тогда равномерно в каждом конечном интервале*

$$\lim_{\mu \to \infty} R(x, \mu) = 0,$$

т. е. разность между обобщенным интегралом Фурье и обычным интегралом Фурье стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.

В частности из этой теоремы следует, что *обобщенный интеграл Фурье сходится к значению функций* $f(x)$ *в каждой точке* x_0, *в окрестности которой функция* $f(x)$ *имеет ограниченную вариацию, если коэффициент* $q(x)$ *удовлетворяет следующим условиям*:

1) *Функция* $q(x)$ *ограничена в каждом конечном интервале.*

2) *Уравнение* (1) *не имеет отрицательного спектра.*

Аналогичные теоремы разложения имеют место в случае интервала $(0, \infty)$, а также в случае конечного интервала (a, b).

4. Если уравнение (1) не имеет отрицательного спектра, то можно оценить разность между средними по Чезаро порядка $\delta \leqslant 1$ для обобщенного интеграла Фурье и обычного интеграла Фурье.

Положим

$$R_\delta(x, \mu) = \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu}{\mu}\right)^{\delta} d_\nu R(x, \nu).$$

Теорема 7. *Предположим, что коэффициент* $q(x)$ *удовлетворяет условиям 1) и 2), сформулированным в теореме 2.*

Пусть $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$.

Существует константа $C = C(x_0, x_1)$ *так, что если* $x \in (x_0, x_1)$ *и* $\mu \to \infty$, *то справедливы следующие оценки*:

1) *Если* $\alpha < {}^1/_2$, *то*

$$|R_\delta(x, \mu)| < \frac{C\|f\|}{\mu^{\alpha + \delta - 1/2}}.$$

2) *Если* $\alpha = {}^1/_2$, *то*

$$|R_\delta(x, \mu)| < \frac{C\|f\| \ln \mu}{\mu^\delta}.$$

3) *Если* $\alpha > {}^1/_2$, *то*

$$|R_\delta(x, \mu)| < \frac{C\|f\|}{\mu^\delta}. \qquad (6)$$

В частности, если функция $q(x)$ ограничена в каждом конечном интервале, то $\alpha = 1$ и, следовательно, имеет место оценка (6), из которой, в частности, следует, что в каждой точке непрерывности функции $f(x)$ среднее арифметическое любого порядка $\delta > 0$ обобщенного интеграла Фурье функции $f(x)$ сходится к значению функции (ср. с результатом Титчмарша ([3])).

Аналогичная теорема имеет место в случае интервала $(0, \infty)$ и в случае конечного интервала (a, b).

5. В случае бесконечного интервала $(-\infty, \infty)$ или $(0, \infty)$, наряду с асимптотическими формулами (2) и (3), имеет место еще одна асимптотическая формула:

Теорема 8. *Пусть коэффициент* $q(x)$ *суммируем в каждом конечном интервале. При каждых фиксированных* x, y *и* μ_0

$$\lim_{\mu\to\infty} \{[\theta_1(x, y; \mu + \mu_0) - \theta_1(x, y; \mu)] - [\theta_1^*(x, y; \mu + \mu_0) - \theta_1^*(x, y; \mu)]\} = 0. \quad (7)$$

Равенство (7) *имеет место равномерно по* (x, y) *в каждой конечной области.*

Частный случай теоремы 8 был ранее получен В. А. Марченко ([4]), который рассмотрел полупрямую $(0, \infty)$ и точку $x = y = 0$.

Поступило
23 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям, М.-Л., 1950. [2] Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., 16, 4, 325 (1952). [3] E. C. Titchmarsh, Quart. J. Math., 2, No. 8, 258 (1951). [4] В. А. Марченко, Тр. Моск. матем. об-ва, 1, 327 (1952).