

И. И. ИБРАГИМОВ

**О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ В СРЕДНЕМ ФУНКЦИИ,  
s-Я ПРОИЗВОДНАЯ КОТОРОЙ ИМЕЕТ ОГРАНИЧЕННУЮ ВАРИАЦИЮ  
НА ОТРЕЗКЕ  $[-1, 1]$**

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 25 II 1953)

В настоящей работе мы получаем асимптотические выражения наилучшего приближения многочленами в среднем функций, имеющих разрывную производную любого порядка  $s > 0$  (не обязательно целого) с ограниченной вариацией на сегменте  $[-1, 1]$ . Эта задача в случае целого нечетного  $s > 0$  рассматривалась С. М. Никольским<sup>(1)</sup>. При этом доказанные утверждения базируются на его прежних результатах<sup>(2)</sup> о наилучшем приближении многочленами в среднем функции  $|x - c|^s$  ( $|c| < 1$ ) на отрезке  $[-1, 1]$ , наилучшее (равномерное) приближение которой ранее изучено С. Н. Бернштейном<sup>(3)</sup>.

Решение нашей задачи связано с нахождением наилучшего приближения многочленами в среднем функции

$$V_s(x - c; a, b) = [a(x - c) + b|x - c|]|x - c|^s \quad (|c| < 1)$$

на отрезке  $[-1, 1]$ , где  $a$  и  $b$  — любые действительные числа.

Прежде всего, доказана следующая формула:

$$(x - c)|x - c|^s - Q_{n-2}(x) = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2} R_{n-1}(x) I_n(x), \quad (1)$$

где положено, что

$$I_n(x) = \frac{4(-1)^l(1-c^2)^{\frac{s+1}{2}}}{n^{s+3}} \int_0^\infty \frac{u^{s+2} du}{\left[ (c-x)^2 + (1-cx) \frac{u^2}{n^2} \right] (e^u - e^{-u})} + \\ + \frac{1}{n^{s+3}} \int_0^\infty \frac{\left[ (c-x) p_1(u) + \frac{1}{n} p_2(u) \right] u^{s+2} du}{\left[ (c-x)^2 + (1-cx) \frac{u^2}{n^2} \right] (e^u - e^{-u})},$$

причем  $|p_k(u)| \leq q_k(u)$  ( $k = 1, 2$ ) и  $q_k(u)$  — многочлен, зависящий только от  $u$ ; кроме того,

$$R_{n-1}(x) = \frac{\sin n \arccos x}{\sin \arccos x}$$

есть многочлен степени  $(n - 1)$ .

Отметим, что все утверждения С. М. Никольского относительно функции  $|x - c|^s$  ( $|c| < 1$ ) благодаря формуле (1) доказываются тем же методом для функции  $(x - c)|x - c|^s$  ( $|c| < 1$ ) с той разницей, что

вместо константы  $M_s$  С. М. Никольского получается константа

$$N_s = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{s+2} E_n(x|x^s)_L = \frac{8}{\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^{\infty} |\sin t| \int_0^{\infty} \frac{u^{s+2} du dt}{(e^u - e^{-u})(u^2 + t^2)}. \quad (2)$$

С. М. Никольский при  $s = 1, 3, 5, \dots$  показал, что

$$N_s = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^{s+1}}. \quad (2')$$

Пользуясь формулой (1) и соответствующей формулой С. М. Никольского (см. (2), формула 4.19), показываем, что если  $s > -2$ ,  $|c| < 1$ , то при любом вещественном  $a$  и  $b$  имеет место неравенство

$$E_n \{v_s(x-c; a, b)\}_L \leq (1-c^2)^{\frac{s+2}{2}} G(s, a, b) n^{-s-2} + O\left(\frac{\ln n}{n^{s+3}}\right), \quad (3)$$

где

$$G(s, a, b) = \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} \left| a \sin \frac{\pi s}{2} \sin t \int_0^{\infty} \frac{u^{s+2} du}{(e^u - e^{-u})(u^2 + t^2)} + \right. \\ \left. + b \cos \frac{\pi s}{2} \cos t \int_0^{\infty} \frac{u^{s+2} du}{(e^u + e^{-u})(u^2 + t^2)} \right| dt. \quad (4)$$

*Лемма.* Если  $s > 0$  — любое вещественное число и  $\psi(x)$  — абсолютно непрерывная функция на сегменте  $-1 \leq x \leq 1$ , то для наилучшего приближения в среднем функции

$$H(x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{-1}^x (x-t)^{s-1} \psi(t) dt$$

имеет место асимптотическое равенство  $E_n(H)_L = O(n^{-s-1})$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Наша общая задача благодаря лемме находит свое полное решение в следующем виде:

**Теорема 1.** Пусть  $s > 0$  — любое действительное число (не обязательно целое) и  $f(x)$  имеет на сегменте  $[-1, 1]$  абсолютно непрерывную производную\* порядка  $s-1$ , которая, в свою очередь, является неопределенным интегралом от функции  $\varphi(x) = f^{(s)}(x)$ , обладающей следующими свойствами:

1)  $\varphi(x)$  имеет ограниченную вариацию на сегменте  $[-1, 1]$  и разлагается в сумму вида  $\varphi(x) = g(x) + h(x)$ , где  $g(x)$  — функция скачков, а  $h(x)$  — абсолютно непрерывная функция;

2)  $\varphi(x)$  фактически имеет хотя бы один разрыв в интервале  $(-1, 1)$ .

Тогда имеет место неравенство:

$$E_n(f)_L \leq \frac{G(s, a, b)}{2\Gamma(s+1)n^{s+1}} \sum_{k=1}^{\infty} |B_k| (1-c_k^2)^{\frac{s+1}{2}} + O(n^{-s-1}) \quad (n \rightarrow \infty),$$

\* Функция  $H(t)$  называется  $s$ -кратным неопределенным интегралом  $\psi(t)$ , и наоборот,  $\psi(t)$  называется производной порядка  $s$  от функции  $H(t)$ , т. е.  $H^{(s)}(x) = \psi(x)$ .

где  $c_1, c_2, \dots, c_k, \dots$  — точки, в которых  $\varphi(x)$  имеет существенные разрывы со скачками

$$B_k = \varphi(c_k + 0) - \varphi(c_k - 0) \neq 0$$

и константы  $G(s, a, b)$  определяются формулой (4).

Следуя С. М. Никольскому<sup>(6)</sup>, обозначим через  $W^{(s)}V$  класс функций  $f(x)$ , имеющих абсолютно непрерывную на отрезке  $[-1, 1]$  производную порядка  $(s-1)$  и производную  $f^{(s)}(x) = \varphi(x)$  порядка  $s$  с ограниченной вариацией, удовлетворяющей неравенству:

$$\|\varphi\|_V = \text{Var } \varphi(x) \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1$$

где  $s$  — любое неотрицательное число, необязательно целое.

Обозначим далее через  $W^{(s+1)}L$  при любом  $s > 0$  (необязательно целом) класс функций  $f(x)$ , имеющих абсолютно непрерывную производную порядка  $s$ , для которой  $\int_{-1}^1 |f^{(s+1)}(t)| dt \leq 1$ .

**Теорема 2.** Если  $s \geq 0$  — любое число (необязательно целое), то справедливы соотношения\*:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(W^{(s)}V)_L &= \mathcal{E}_n(W^{(s+1)}L) = \frac{1}{2\Gamma(s+1)} \max E_n\{v_s(x-c; 1, 1)\}_L + O(n^{-2s-2}) \leq \\ &\leq \frac{G(s, 1, 1)}{n^{s+1}} + O(n^{-s-2} \ln n), \end{aligned}$$

где  $G(s, 1, 1)$  определяется равенством (4).

**Теорема 3.** Пусть  $P_n^{(s)}(x, c) = \sum_{k=0}^n \alpha_k^{(s)}(c) x^k$  есть многочлен степени  $n$ , наилучший в среднем на отрезке  $[-1, 1]$  для функции  $v_s(x-c; 1, 1)$  при любом  $s > 0$ . Тогда линейный метод

$$u_n(f, x) = \frac{1}{2\Gamma(s+1)} \sum_{k=0}^n x^k \int_{-1}^1 \alpha_k^{(s)}(t) d\varphi(t), \quad \varphi(t) = f^{(s)}(t),$$

приближения функции  $f(x)$  многочленами степени  $n$  есть с точностью до  $O(n^{-2s-2})$  наилучший для классов  $W^{(s)}V$  и  $W^{(s+1)}L$ .

Азербайджанский государственный педагогический институт  
им. В. И. Ленина  
Баку

Поступило  
31 1 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> С. М. Никольский, ДАН, 55, № 3, 195 (1947). <sup>2</sup> С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 11, 139 (1947). <sup>3</sup> С. Н. Бернштейн, ДАН, 18, № 7, 379 (1938). <sup>4</sup> С. Н. Бернштейн, Изв. АН СССР, сер. матем., 2, 167 (1938). <sup>5</sup> И. И. Ибрагимов, там же, 10, № 5, 429 (1946). <sup>6</sup> С. М. Никольский, ДАН, 58, № 2 (1947).

\* При этом положено, что

$$\mathcal{E}_n(W^{(s)}V)_L = \max_{f \in W^{(s)}V} E_n(f)_L, \quad \mathcal{E}_n(W^{(s+1)}L)_L = \max_{f \in W^{(s+1)}L} E_n(f)_L.$$