

В. С. ЖГЕНТИ

**ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА К ПОЛОГОЙ
УПРУГОЙ ОБОЛОЧКЕ, ИМЕЮЩЕЙ ФОРМУ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО
ПАРАБОЛОИДА**

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 II 1953)

Пусть срединная поверхность оболочки имеет форму эллиптического параболоида

$$z = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2, \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0,$$

где x, y, z — декартовы координаты.

Пусть G_0 — конечная область на срединной поверхности оболочки и G — ее ортогональная проекция на плоскость $x + iy$; контур области G обозначим через L .

Оболочку называют пологой, если величины

$$\sqrt{1 + 4\lambda_1^2 x^2} - 1, \quad \sqrt{1 + 4\lambda_2^2 y^2} - 1$$

достаточно малы по сравнению с единицей.

Уравнения равновесия пологой оболочки имеют вид (1):

$$\begin{aligned} -\frac{Eh}{1-\sigma^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_{11} + \sigma\varepsilon_{22}) + (1-\sigma) \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} \right\} &= Q_1, \\ -\frac{Eh}{1-\sigma^2} \left\{ (1-\sigma) \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_{22} + \sigma\varepsilon_{11}) \right\} &= Q_2, \\ -\frac{Ek^3}{12(1-\sigma^2)} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\beta_{11} + \sigma\beta_{22}) + 2(1-\sigma) \frac{\partial^2 \beta_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\beta_{22} + \sigma\beta_{11}) \right\} - \\ -\frac{Eh}{1-\sigma^2} \left\{ \frac{2\lambda_1 (\varepsilon_{11} + \sigma\varepsilon_{22})}{\sqrt{1 + 4\lambda_1^2 x^2 + 4\lambda_2^2 y^2}} + \frac{2\lambda_2 (\varepsilon_{22} + \sigma\varepsilon_{11})}{\sqrt{1 + 4\lambda_1^2 x^2 + 4\lambda_2^2 y^2}} \right\} &= Q_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где h — толщина оболочки, E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона, ε_{ij} и β_{ij} — компоненты деформаций, а Q (Q_1, Q_2, Q_3) — внешняя нагрузка.

Компоненты деформаций связаны с вектором $U(u, v, w)$ смещения точек срединной поверхности соотношениями (1)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\lambda_1 w}{\sqrt{1 + 4\lambda_1^2 x^2 + 4\lambda_2^2 y^2}}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2\lambda_2 w}{\sqrt{1 + 4\lambda_1^2 x^2 + 4\lambda_2^2 y^2}}, \\ \beta_{11} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \beta_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \beta_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия (1) оболочки мы запишем символически в виде

$$AU = Q.$$

Поставим следующую задачу: найти вектор смещения U при условии:

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ на } L, \quad (2)$$

где ν — нормаль к L .

Введем в рассмотрение вещественное гильбертово пространство, элементы которого суть векторы, определяемые в точках поверхности G_0 . Скалярное произведение зададим формулой

$$(U_1, U_2) = \iint_G (u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2) dx dy.$$

На множестве векторов смещений, удовлетворяющих краевым условиям (2), оператор A удовлетворяет тождеству:

$$(AU, U) = 2\mathcal{E}(U), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{Eh}{2(1-\sigma^2)} \iint_G \left\{ \epsilon_{11}^2 + 2\sigma \epsilon_{11} \epsilon_{22} + \epsilon_{22}^2 + 2(1-\sigma) \epsilon_{12}^2 + \right. \\ & \left. + \frac{h^2}{12} [\beta_{11}^2 + 2\sigma \beta_{11} \beta_{22} + \beta_{22}^2 + 2(1-\sigma) \beta_{12}^2] \right\} dx dy. \end{aligned}$$

Если применить неравенства

$$a^2 + 2\sigma ab + b^2 \geq (1-\sigma)(a^2 + b^2), \quad a^2 + b^2 \geq 1/2(a-b)^2,$$

то в силу (3) будем иметь:

$$\begin{aligned} (AU, U) = & \frac{Eh}{2(1+\sigma)} \iint_G \left\{ \lambda \left[\frac{1}{2} \lambda_2^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \lambda_1^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \right. \right. \\ & \left. - \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \\ & \left. + \frac{h^2}{12} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] \right\} dx dy, \quad (4) \end{aligned}$$

где

$$\lambda = \min \left(\frac{1}{\lambda_1^2}, \frac{1}{\lambda_2^2}, \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \right).$$

Отсюда, применяя формулу Грина, неравенство Фридрихса и граничные условия (2), получим:

$$\begin{aligned} (AU, U) \geq \gamma^2 \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \\ \gamma^2 = \text{const} > 0. \quad (5) \end{aligned}$$

Применяя еще раз неравенство Фридрихса, из (5) получим:

$$(AU, U) \geq \gamma^2 \iint_G (u^2 + v^2 + w^2) dx dy, \quad \gamma^2 = \text{const} > 0,$$

т. е. оператор A — положительно-определенный. Отсюда, как обычно, вытекает, что поставленная выше задача имеет решение, которое можно построить по методу Ритца.

Пусть $\{U_n(u_n, v_n, w_n)\}$ — последовательность Ритца. Как известно ⁽²⁾,

$$\|U_n - U_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0, \quad \|U_n - U_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0,$$

где

$$\|U\|^2 = (U, U), \quad |U|^2 = (AU, U).$$

Отсюда, в силу (4) и (5), следует, что $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$, $\left\{\frac{\partial u_n}{\partial x}\right\}$, $\left\{\frac{\partial u_n}{\partial y}\right\}$, $\left\{\frac{\partial v_n}{\partial x}\right\}$, $\left\{\frac{\partial v_n}{\partial y}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_n}{\partial x \partial y}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2}\right\}$ сходятся в среднем. В силу теоремы вложения пространств С. Л. Соболева ⁽³⁾ имеем, что $\{w_n\}$ сходится равномерно в замкнутой области \bar{G} .

Горийский государственный педагогический институт
им. Н. Бараташвили

Поступило
5 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Г. Михлин, Прикладн. матем. и мех., 16, в. 4, 417 (1952). ² С. Г. Михлин, Прямые методы в математической физике, М., 1950. ³ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950.