Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XC, № 1

МАТЕМАТИКА

И. А. ВИЛЬНЕР

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ АНАМОРФОЗЫ ФУНКЦИЙ В ИНВАРИАНТНОЙ ФОРМЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 III 1953)

Проблема анаморфозы функции F, зависящей от 3 абстрактных переменных z_1, z_2, z_3 и какого угодно числа параметрических абстрактных переменных $z_4, z_5, \ldots$, влияющих автоматически на размерность и характер шкал и полей номограммы, заключается в определении вектор-функций $\underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \underset{3}{\mathbf{a}}$, направление каждой из которых зависит, соответственно, от z_1, z_2, z_3 (на поведение параметрических переменных ограничений не налагается), т. е. заключается в определении векторов $\underset{i}{\mathbf{a}}\ (i = 1, 2, 3)$ из уравнения

$$F = \left(\underset{1}{\mathbf{a}}\,\underset{2}{\mathbf{a}}\,\underset{3}{\mathbf{a}}\right). \tag{1}$$

Мы будем решать это уравнение с тем ограничением, что вектор $\underset{3}{\mathbf{a}}$ не зависит от z_1 и z_2 (задача (S)). Изложенное далее решение указанной задачи не требует никаких предположений о дифференцируемости или даже непрерывности функции.

Природа аргументов z_1, z_2, z_3 остается совершенно произвольной — они могут пробегать любые абстрактные множества Z_1, Z_2, Z_3. Для номографии практически важен случай, когда они являются многомерными векторными величинами: $Z_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{it_i})$.

Полагая $\mathbf{a} = \underset{3}{\mathbf{a}}$, $\quad b = \left[\underset{1}{\mathbf{a}}\,\underset{2}{\mathbf{a}}\right]$, можем записать F в виде

$$F = \mathbf{ab}. \tag{2}$$

Первый вопрос, подлежащий решению, заключается в нахождении условий представимости F в виде скалярного произведения (2), где вектор $\mathbf{a}$ зависит только от z_3, а вектор $\mathbf{b}$ — только от совокупности переменных z_1 и z_2. Для его решения введем символическую операцию $\partial^k F / \partial z_i^k = F_{z_i^k}$, заключающуюся просто в замене в выражении $F(z_1, z_2, z_3)$ переменной z_i на переменную z_i^k. При $k = 1$ и $k = 0$ будем писать просто $\partial F / \partial z_i = F_{z_i}$, понимая под этим операцию замены z_i на z_i^1 (с индексом $k = 1$), $\dfrac{\partial^0 F}{\partial z_i^0} = F$ (т. е. $z_i^0 \equiv z_i$ и $F_{z_i^0} = F$). Например: $F_{z_1 z_3} = F(z_1^1, z_2, z_3^1)$, $F_{z_2^2 z_3^3} = F(z_1, z_2^2, z_3^3)$, $F_{z_i^0} = F$, $F_{z_1^0 z_2 z_3^0} = F(z_1, z_2^1, z_3)$ и т. д. Позднее будет указано, в каком смысле эта символическая операция родственна дифференцированию.

Теорема 1. *Для существования билинейного представления*

$$F(z_1, z_2, z_3) = \sum_{i=1}^{3} a_i(z_3)\, b_i(z_1, z_2) \tag{3}$$

необходимо и достаточно тождественное обращение в нуль определителя $A^{z_3} = |a_{ij}|$, $a_{ij} = F_{\underset{3}{z}^{j-1}\underset{1}{z}^{i-1}\underset{2}{z}^{i-1}}$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, т. е.

$$A^{z_3} = 0. \tag{4}$$

Заметим, что в случае тождественного обращения в нуль алгебраического дополнения $A_{11}^{z_3}$ представление (3) сводится вместо трехчленного к двучленному или одночленному. Этот случай мы оставим в стороне и выберем для дальнейшего постоянные z_i^k $(i, k = 1, 2, 3)$, для которых $A_{11}^{z_3} \neq 0$. В предположениях (4) и $A_{11}^{z_3} \neq 0$ разложение (3) может быть получено в виде $F = -\frac{A_{12}}{A_{11}} F_{z_3} - \frac{A_{13}}{A_{11}} F_{z_3^2} - \frac{A_{14}}{A_{11}} F_{z_3^3}$, т. е. векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ могут быть заданы по компонентам формулами $a_i = -A_{1i}^{z_3}/A_{11}^{z_3}$, $b_i = F_{\underset{3}{z}^{i}}$ $(i = 1, 2, 3)$, где $A_{ik}^{z_3}$ — алгебраические дополнения элементов матрицы A^{z_3}. Теперь естественно возникает вопрос о разрешимости уравнения $\mathbf{b} = [\underset{1}{\mathbf{a}}\,\underset{2}{\mathbf{a}}]$ под условием, чтобы направление вектора $\underset{1}{\mathbf{a}}$ зависело только от z_1, а вектора $\underset{2}{\mathbf{a}}$ только от z_2.

Теорема 2. *Для того чтобы существовало представление* $\mathbf{b} = [\underset{1}{\mathbf{a}}\,\underset{2}{\mathbf{a}}]$, *где направления векторов* $\underset{1}{\mathbf{a}}$ *и* $\underset{2}{\mathbf{a}}$ *зависят только от соответствующих переменных* z_1 *и* z_2, *необходима и достаточна совокупность условий*

$$\underset{(1)}{A^{z_3}} = 0, \quad \underset{(2)}{A^{z_3}} = 0,$$

где $\underset{(k)}{A^{z_3}} = |a_{ij}|$, $a_{ij} = F_{\underset{3}{z}^{j}\underset{k}{z}^{i-1}}$ $(k = 1, 2;\ j = 1, 2, 3)$.

Теоремы 1 и 2 содержат в себе достаточные условия разрешимости задачи (S). Эти условия оказываются и необходимыми, если определитель $A_{11}^{z_3}$ не тождественно равен нулю. При этом выбор значений z_i^k $(i, k = 1, 2, 3)$ оказывается безразличным для дела, лишь бы выполнялось условие $A_{11}^{z_3} \neq 0$. Это устанавливает следующая теорема.

Теорема 3. *Для разрешимости задачи* (S) *достаточно, чтобы при каких-либо фиксированных* z_i^k $(i, k = 1, 2, 3)$, *для которых* $A_{11}^{z_3} \neq 0$, *выполнялись условия* (4) *и* (5). *Если задача* (S) *разрешима, то условия* (4) *и* (5) *выполняются при любых* z_i^k, *для которых* $A_{11}^{z_3} \neq 0$.

При практическом применении теоремы 3 достаточно найти z_i^k, удовлетворяющие условию $A_{11}^{z_3} \neq 0$, и проверить при этих z_i^k тождественное по z_1, z_2, z_3 соблюдение условия (4). Если условие (4) окажется выполненным, то векторы $\underset{1}{\vec{\alpha}}, \underset{2}{\vec{\alpha}}, \underset{3}{\vec{\alpha}}$, определенные по формулам $\underset{1}{\alpha_1} = \underset{(2)}{A_{31}}$, $\underset{1}{\alpha_2} = \underset{(2)}{A_{32}}$, $\underset{1}{\alpha_3} = \underset{(2)}{A_{33}}$; $\underset{2}{\alpha_1} = \underset{(1)}{A_{31}}$, $\underset{2}{\alpha_2} = \underset{(1)}{A_{32}}$, $\underset{2}{\alpha_3} = \underset{(1)}{A_{33}}$; $\underset{3}{\alpha_1} = A_{12}$, $\underset{3}{\alpha_2} = A_{13}$, $\underset{3}{\alpha_3} = A_{14}$, приводят к уравнению $(\underset{1}{\vec{\alpha}}\,\underset{2}{\vec{\alpha}}\,\underset{3}{\vec{\alpha}}) = 0$, равносильному уравнению $F = 0$. При этом вектор $\underset{3}{\vec{\alpha}}$, как легко видеть, зависит только от переменного z_3.

Но векторы $\underset{1}{\vec{\alpha}}$ и $\underset{2}{\vec{\alpha}}$, вообще говоря, зависят от совокупности z_1 и z_2. Иначе говоря, имеет место принцип игнорирования критериев: если выполнено лишь условие (4), то все равно номограмма получается, но векторам $\underset{1}{\vec{\alpha}}$ и $\underset{2}{\vec{\alpha}}$ соответствуют, вообще говоря, бинарные поля или шкалы. При этом имеет место

Теорема 4. *Если при заданных z_i^k выполнено условие $A_{11}^{z_3} \neq 0$ и тождественно по z_1, z_2, z_3 условие $A^{z_3} = 0$, то условия* (5) *равносильны, соответственно, независимости $\underset{1}{\vec{\alpha}}$ от z_2 и $\underset{2}{\vec{\alpha}}$ от z_1.*

Таким образом, условия (5) проверяются в процессе самого построения.

В теореме 1 совокупность переменных z_1 и z_2 можно считать одним переменным. При такой интерпретации теорема 1 становится частным случаем следующего предложения:

Теорема 5. *Для того чтобы функция $F(u, v)$ двух абстрактных переменных u и v была представима в виде $F(u, v) = \sum_{l=1}^{N} a_l(u) b_l(v)$, необходимо и достаточно условие (полагаем $a_{ij} = F_{u^{i-1} v^{j-1}}$):*

$$A^v = |a_{ij}| = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N+1. \tag{6}$$

Условие (6), как известно, находит применение в теории интегральных уравнений (длина N равна рангу A^v).

Задача (S) в N-мерном случае формулируется так: найти представление функции $F(z_1, z_2, \ldots, z_N)$ в виде $MF = (\underset{1}{\vec{\alpha}}, \underset{2}{\vec{\alpha}}, \ldots, \underset{N}{\vec{\alpha}})$, где вектор $\underset{N}{\vec{\alpha}}$ зависит только от z_N, M вида $\varphi(z_N)\psi(z_1, \ldots, z_{N-1})$, направление $\underset{k}{\vec{\alpha}}$ зависит только от z_k. Решение этой задачи дается теоремами, вполне аналогичными теоремам 1—4*. В частности, при $N = 4$ получаем эффективную теорию номограмм Мемке со шкалами или какими угодно полями (двумерными, трехмерными и т. д.). Связь символического дифференцирования с обычным заключается в том, что ряд установленных нами формул сохраняет силу, если заменить символическое дифференцирование обычным. Например, в случае N-кратно дифференцируемой функции $F(u, v)$ из тождества (6), понимаемого в смысле символического дифференцирования, легко выводится аналогичное тождество, где знаки u^k и v^k обозначают k-кратное дифференцирование по u или, соответственно, по v. При надлежащих ограничениях (например, аналитичности функции F) верно и обратное предложение: из тождества (6), понимаемого в смысле обычного дифференцирования, вытекает тождество (6), понимаемое символически, а, следовательно, и существование билинейного представления теоремы 5.

Отмеченная связь символического и обычного дифференцирования позволяет формулировать с некоторыми ограничениями теоретико-функционального характера (аналитичность или достаточное число раз дифференцируемость, связность области определения функции) принцип инвариантности формы решений проблемы анаморфозы функций, о линейной зависимости функций (с этой целью естественно

---

* Критерии: $A^{z_N} = 0$, $A_{11}^{z_N} \neq 0$, $\underset{(i)}{A}^{z_N} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$, $M = \pm A_{11}^{z_N} \overline{B}$, где $\overline{B}$ — определитель ([1]). Для анаморфизируемости F необходимо $A^{z_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, $A_{11}^{z_i} \neq 0$. Тогда $M = 1$ или произведение вида $M = \varphi_1(z_1) \ldots \varphi_{N-1}(z_{N-1}) \cdot \varphi_N(z_N)$.

вводится «вронскиан», связанный предельным соотношением с обычным вронскианом тех же функций), о би- и полилинейной представимости функций, о представимости вектор-функций векторными и смешанными произведениями вектор-функций, о представимости функции в виде внешнего произведения вектор-функций (знакопеременных чисел Грассмана) и т. п. при заданном распределении аргументов между искомыми функциями — принцип, заключающийся в том, что решения сохраняют силу, если под символическими производными или дифференциалами понимать обычные и обратно. Результатам настоящей работы (для любого N) можно придать инвариантную форму, если ввести условный дифференциал как полную разность, а именно: $d_u^m F \equiv \Delta_u^m F = \sum_{l=0}^{m} (-1)^l C_m^l F_{u^{m-l}}$, $m = 1, 2, \ldots, N$, $d_u^0 F = F^*$. Тогда определяем смешанные «дифференциалы» разных порядков.

Теорема 6. *Критерии* (4), (5) *и* (6) *сохраняют смысл для соответствующих задач, если предположить функции определенными в связной области и достаточное число раз дифференцируемыми (тем более аналитическими по непараметрическим переменным) и ранги соответствующих определителей на единицу ниже их порядков, если все «производные» заменить дифференциалами по правилу* $F_{z_i^k} \to d_{z_i}^k F$, $F_{z_i^p z_j^q} \to d_{z_i}^p d_{z_j}^q F$, $F_{u^m v^n} \to d_u^m d_v^n F$. *Отсюда следует, что условия* (4), (5) *инвариантны.*

В дифференциальном исчислении требуется точная дизъюнкция различных переменных. Здесь это полностью отсутствует, открывая возможности в определителях типа A^{z_2}, $\underset{(1)}{A}^{z_2}$, $\underset{(2)}{A}^{z_2}$ толковать «производные» как угодно; например, можно в определителях типа A^{z_2}, $\underset{(1)}{A}^{z_2}$, $\underset{(2)}{A}^{z_2}$ и т. д. уменьшить индексы l при z_i^l на какое угодно число, помня, что $z_i^0 \equiv z_i$. Можем заменить, например, в 1-й строке определителя A^{z_2} $F_{z_1 z_2}$ на F_{z_1}, во 2-й $F_{z_1^2 z_2^2}$ на F_{z_2}, в 3-й $F_{z_1^2 z_2^2}$ на $F_{z_1^2}$, затем другой раз $F_{z_1^2 z_2^2}$ на $F_{z_2^2}$, наконец, в 3-й раз $F_{z_1^2 z_2^2}$ на $F_{z_1 z_2}$. Это даст при $A_{33}^{z_2} \neq 0$ три необходимых и достаточных условия билинейного представления в инвариантной форме. В этой инвариантной форме решение задачи (S) для $N = 3$ дано на стр. 258, 259 (и 129, 147, 149, 150, 151) работы ([1]). Решение в дифференциальном смысле является предельным, когда $\lim z_i^l = z_i$ и выполнены некоторые ограничения. Аналогично при любом N. Интерес нового чисто алгебраического подхода к делу заключается отнюдь не только в возможности охватить случай недифференцируемых и непрерывных функций. Как было показано, он открывает совершенно элементарные пути фактического осуществления анаморфозы, при следовании которым попутно проверяются условия разрешимости задачи.

Автор благодарит акад. А. Н. Колмогорова за редактирование работы, в процессе которого были уточнены некоторые формулировки.

Поступило
13 V 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Номографический сборник МГУ, 1951.

* «Вронскиан» W для $f_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ записывается, как в анализе, но производные f_{z^l} понимаются условно. Для линейной зависимости этих функций необходимо и достаточно, чтобы $W = 0$. Если $f_i(z)$ — аналитические функции z, теорема заведомо инвариантна. Если f_i — аналитические функции многих переменных, теорема заведомо инвариантна, если в W заменить «производные» «дифференциалами».