**Доклады Академии Наук СССР**
**1953. Том LXXXIX, № 5**

*ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

К. ШЕВЧЕНКО

# ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТЬЮ

*(Представлено академиком С. А. Христиановичем 10 II 1953)*

В излагаемой ниже работе дается решение плоской задачи для пространства (или пластинки), ослабленного круговым цилиндром. Решение строится в предположении, что внутри цилиндра (или выреза пластинки) приложена уравновешенная система двух сосредоточенных сил, отнесенных к единице длины цилиндра или толщине пластинки, а на бесконечности действует всестороннее равномерное растяжение или сжатие. В настоящей задаче будем требовать такого соотношения между величиной сосредоточенной силы и интенсивностью напряжения на бесконечности, при котором контур цилиндра был бы свободен от напряжений.

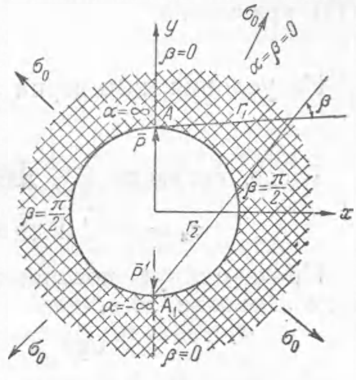


Рис. 1

Метод решения. По аналогии с задачей для сплошного цилиндра ([1]), воспользуемся биполярной системой координат. Расположение системы координат и точки приложения сосредоточенных сил приведено на рис. 1.

Биполярные координаты $\alpha$ и $\beta$ для внешней по отношению к цилиндру области связаны с декартовой системой координат уравнениями

$$x = \frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad y = \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}. \tag{1}$$

Система ортогональных окружностей ($\alpha = \mathrm{const}$, $\beta = \mathrm{const}$) имеет вид

$$(x - \operatorname{ctg}\beta)^2 + y^2 = \sin^{-2}\beta; \quad (y - \operatorname{cth}\alpha)^2 + x^2 = \operatorname{sh}^{-2}\alpha, \tag{2}$$

где $x$ и $y$ — безразмерные координаты, отнесенные к радиусу цилиндра.

Компоненты деформации выражаются через перемещения следующим образом:

$$\begin{gathered} e_\alpha = (\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\frac{\partial u}{\partial\alpha} - v\sin\beta, \quad e_\beta = (\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\frac{\partial v}{\partial\beta} - u\operatorname{sh}\alpha, \\ \gamma = \frac{\partial}{\partial\alpha}[(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)v] + \frac{\partial}{\partial\beta}[(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)u]. \end{gathered} \tag{3}$$

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau}{\partial \beta} - (\sigma_\alpha - \sigma_\beta)\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta} - 2\tau\frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta} = 0,$$
$$\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma_\beta}{\partial \beta} + (\sigma_\alpha - \sigma_\beta)\frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta} - 2\tau\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta} = 0. \tag{4}$$

Уравнение совместности для деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\alpha}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 \varepsilon_\beta}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\left[\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial \alpha}(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta) - \sin\beta\frac{\partial}{\partial \beta}(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)\right] +$$
$$+ \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\left[\sin\beta\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} + \operatorname{sh}\alpha\frac{\partial \gamma}{\partial \beta}\right] + \frac{2(1 - \operatorname{ch}\alpha\cos\beta)}{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^2}(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta) - \frac{2\gamma\operatorname{sh}\alpha\sin\beta}{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^2} = 0. \tag{5}$$

Построение решения. Решение системы (4) представим в виде

$$\sigma_\alpha = \operatorname{ch}\alpha\int\varphi(\beta)\,d\beta - \int\varphi(\beta)\cos\beta\,d\beta,$$
$$\sigma_\beta = \cos\beta\int\varphi(\beta)\,d\beta - \int\varphi(\beta)\cos\beta\,d\beta, \quad \tau = 0, \tag{6}$$

где $\varphi(\beta)$ — произвольная функция.

Подставляя $\sigma_\alpha$, $\sigma_\beta$ и $\tau$ в закон Гука, а затем полученные выражения для $\varepsilon_\alpha$, $\varepsilon_\beta$ и $\gamma$ в уравнение совместности (5), получим для функции $\varphi(\beta)$ уравнение

$$\varphi''(\beta) + \varphi(\beta) = 0. \tag{7}$$

Из условия симметрии задачи следует

$$\varphi = C_1\sin\beta. \tag{8}$$

Тогда, согласно (6), для $\sigma_\alpha$ и $\sigma_\beta$ получим выражения

$$\sigma_\alpha = -\frac{C_1}{2}(2\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\cos\beta, \quad \sigma_\beta = -\frac{C_1}{2}\cos^2\beta. \tag{9}$$

Произвольную постоянную $C_1$ определим из краевого условия на бесконечности, т. е.

$$\text{при } \alpha = 0,\ \beta = 0 \quad \sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_0. \tag{10}$$

Из (9) и (10) находим $-C_1/2 = \sigma_0$.

Окончательно будем иметь:

$$\sigma_\alpha = \sigma_0(2\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\cos\beta, \quad \sigma_\beta = \sigma_0\cos^2\beta. \tag{11}$$

На контуре выреза $\beta = \pi/2$, следовательно, контур цилиндрического выреза свободен от напряжений.

Для определения величины сосредоточенной силы, приложенной в полюсах $A_1$ и $A$ (рис. 1), спроектируем напряжение $\sigma_\alpha$, действующее на площадку дуги ($\alpha = \text{const}$), на направление оси $y$-ов; получим:

$$dp = \sigma_\alpha\cos(\widehat{yR})\,ds,$$

или, после подстановки значений $\sigma_\alpha$, $\cos(\widehat{yR})$ и $ds$, получим

$$dp = \frac{\sigma_0(2\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)(\operatorname{ch}\alpha\cos\beta - 1)\cos\beta\,d\beta}{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^2}. \tag{12}$$

Интегрируя предельное значение (12) ($\alpha \to \infty$) по $\beta$ от $\beta = -\pi/2$ до $\beta = \pi/2$, находим

$$p = \sigma_0\pi. \tag{13}$$

Поступило
24 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. Н. Шевченко, Прикладн. матем. и мех., 16, в. 1 (1952).